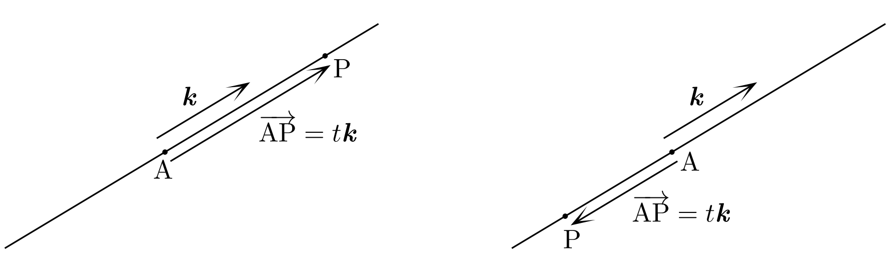
§4.1　座標空間における直線の方向ベクトル

　直線とはまっすぐに限りなく伸びる線のことです．しかしこれは直線のイメージに過ぎません．数学では，直線は座標空間の点集合です．直線をきちんと扱うためにベクトルを用います．

　直線とはある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形です．直線とは，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{k}$ の始点と方向とを変えずに伸ばしたり縮めたり逆向きにしたりしたベクトルの終点の全体です．ベクトル $\boldsymbol{k}$ を方向を変えずに伸ばしたり縮めたり逆向きにしたりすることは，$\boldsymbol{k}$ に実数を掛けることです．ですから，直線とは，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{k}$ の始点を点 A に固定して実数を掛けたベクトルの終点の全体です．つまり，直線とは，実数 t に対して $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k}$ となる点 P の全体です．



座標空間において，点 A と零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{k}$ とにより定められる直線は，次のような図形 L です：各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \quad .$$

このときのベクトル $\boldsymbol{k}$ を直線 L の**方向ベクトル**といいます．直感的にいうと，直線 L の方向ベクトルとは L に平行な零ベクトルでないベクトルです．

　座標空間において，直線 L の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ とある点 A とをとると，各点 P について

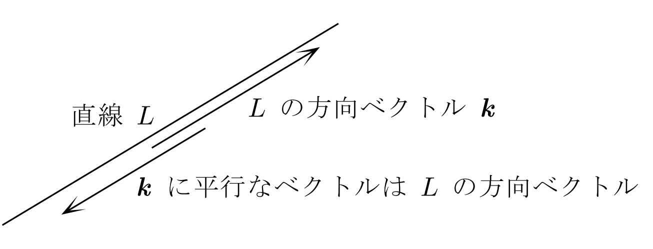
$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \ .$$

このような点 A として L に属す総ての点が当てはまる，というのが次の定理です．

定理 4.1.1　座標空間における直線 L に属す任意の点 A 及び L の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ について，座標空間の各点 P について

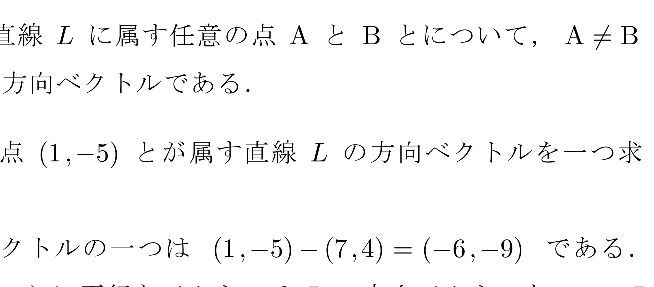
$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

　座標空間における直線 L の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ に平行なベクトルは，L と平行ですから，零ベクトルでなければ L の方向ベクトルです．



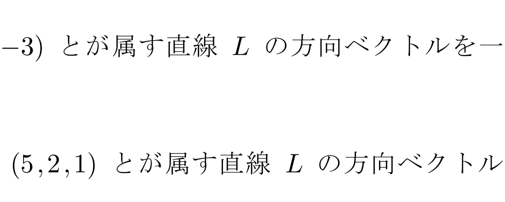
定理 4.1.2　座標空間において，直線 L のある方向ベクトルに平行な零ベクトルでない任意のベクトルは L の方向ベクトルである．

　座標空間における直線 L の方向ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ はどちらも L に平行ですから，$\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ とは平行です．



定理 4.1.3　座標空間おいて，一つの直線の任意の 2 個の方向ベクトルは平行である．

　座標空間における直線 L に属す点 A と B とについて，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L と平行ですから，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ ならばベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L の方向ベクトルです．



定理 4.1.4　座標空間における直線 L に属す任意の点 A と B とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ ならば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L の方向ベクトルである．

[例題]　座標平面の点 $(7,4)$ と点 $(1,-5)$ とが属す直線 L の方向ベクトルを一つ求める．

　定理 4.1.4 より，L の方向ベクトルの一つは $(1,-5)-(7,4)=(-6,-9)$ である．定理 4.1.2 より，ベクトル $(-6,-9)$ に平行なベクトルは L の方向ベクトルなので，L の方向ベクトルの一つは $(2,3)$ である．　[終]

[問題 4.1.1]　座標平面の点 $(8,5)$ と点 $(2,-3)$ とが属す直線 L の方向ベクトルを一つ求めなさい．

[例題]　3 次元座標空間の点 $(9,-6,7)$ と点 $(5,2,1)$ とが属す直線 L の方向ベクトルを一つ求める．

　定理 4.1.4 より，L の方向ベクトルの一つは $(5,2,1)-(9,-6,7)=(-4,8,-6)$ である．定理 4.1.2 より，ベクトル $(-4,8,-6)$ に平行なベクトルは L の方向ベクトルなので，L の方向ベクトルの一つは $(2,-4,3)$ である．　[終]

[問題 4.1.2]　3 次元座標空間の点 $(4,7,2)$ と点 $(1,-2,8)$ とが属す直線 L の方向ベクトルを一つ求めなさい．

定理 4.1.5　座標空間の任意の点 A と B と C とについて，

$$\text{A と B と C とが属す直線がある} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad .$$

[例題]　変数 x について次の条件をできるだけ簡単にする：座標平面において点 $\mathrm{A}=(x,6)$ と $\mathrm{B}=(3,2x)$ と $\mathrm{C}=(4,8)$ とが属す直線がある．

〔解説〕点 A と B と C とが属す直線がある条件は $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ ．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(x,6)-(4,8)=(x-4,-2)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(3,2x)-(4,8)=(-1,2x-8)\ .$$

定理 3.5.5 より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{CB}} &\iff (x-4,-2) \mathbin{/\!/} (-1,2x-8) \iff (x-4)(2x-8)=-2\cdot(-1)\\ &\iff 2x^2-16x+30=0 \iff x^2-8x+15=0\\ &\iff x=3 \text{ または } x=5 \quad .\end{aligned}$$

点 A と B と C とが属す直線がある条件は，$x=3$ または $x=5$ ．　[終]

[問題 4.1.3]　変数 x について次の条件をできるだけ簡単にしなさい：座標平面において点 $\mathrm{A}=(7,x+2)$ と $\mathrm{B}=(x,x)$ と $\mathrm{C}=(x+3,6)$ とが属す直線がある．

[例題]　変数 x と y とについて次の条件をできるだけ簡単にする：3 次元座標空間において点 $\mathrm{A}=(x,y,4)$ と $\mathrm{B}=(1,x,2)$ と $\mathrm{C}=(y,8,8)$ とが属す直線がある．

〔解説〕点 A と B と C とが属す直線がある条件は $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(x,y,4)-(1,x,2)=(x-1,y-x,2)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(y,8,8)-(1,x,2)=(y-1,8-x,6)\ .$$

定理 3.5.4 より，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{BA}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{BC}}\\ \iff& (x-1,y-x,2) \mathbin{/\!/} (y-1,8-x,6)\\ \iff& \text{ある実数 } k \text{ をとると } (y-1,8-x,6)=k(x-1,y-x,2)\\ \iff& \text{ある実数 } k \text{ をとると } y-1=k(x-1) \text{ かつ } 8-x=k(y-x) \text{ かつ } 6=2k \quad .\end{aligned}$$

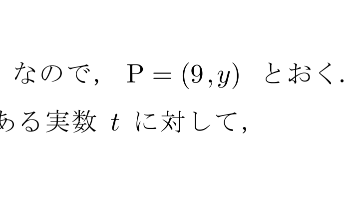
$6=2k$ より $k=3$ なので，$y-1=3(x-1)$ かつ $8-x=3(y-x)$ ，よって $x=2$ かつ $y=4$ ．　[終]

[問題 4.1.4]　変数 x と z とについて次の条件をできるだけ簡単にしなさい：3 次元座標空間において点 $\mathrm{A}=(x,3,z)$ と $\mathrm{B}=(4,9,x)$ と $\mathrm{C}=(z,5,-3)$ とが属す直線がある．

定理 4.1.6　座標空間において，直線 L に属す点 A と L の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ と点 B と点 P とについて，

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\boldsymbol{k}\ .$$

証明　点 A は直線 L に属し，ベクトル $\boldsymbol{k}$ は L の方向ベクトルであるとする．定理 4.1.1 より，各点 P について，



$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k}\ ,$$

点 B について $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=t\boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\boldsymbol{k}\ ,$$

よって

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+t\boldsymbol{k} \quad .$$

（証明終り）

[例題]　xy 座標平面の直線 L について，$(1,-5)\in L$ で，ベクトル $(2,3)$ が L の方向ベクトルであるとする．L に属す点 P の x 座標が 9 であるとする．この点 P を求める．

　原点を O とおく：$\mathrm{O}=(0,0)$ ．点 P の x 座標が 9 なので，$\mathrm{P}=(9,y)$ とおく．$\mathrm{A}=(1,-5)$ とおく．$\mathrm{P}\in L$ なので，定理 4.1.6 より，ある実数 t に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(2,3)\ ,$$
$$(9,y)=(1,-5)+t(2,3)\ ,$$
$$(9,y)=(1+2t,-5+3t)\ ,$$
$$9=1+2t \text{ かつ } y=-5+3t\ ;$$

$9=1+2t$ より $t=4$ ，よって $y=7$ ．故に $\mathrm{P}=(9,7)$ ．　[終]

[問題 4.1.5]　xy 座標平面の直線 L について，$(-10,-12)\in L$ で，ベクトル $(3,4)$ が L の方向ベクトルであるとします．L に属す点 P の y 座標が 8 であるとします．この点 P を求めなさい．

[例題]　xyz 座標空間の直線 L について，$(-5,1,7)\in L$ で，ベクトル $(2,3,-4)$ が L の方向ベクトルであるとする．L に属す点 P の x 座標と z 座標とが等しいとする．この点 P を求める．

〔解説〕原点を O とおく：$\mathrm{O}=(0,0,0)$ ．点 P の x 座標と z 座標とが等しいので，$\mathrm{P}=(x,y,x)$ とおく．$\mathrm{A}=(-5,1,7)$ とおく．$\mathrm{P}\in L$ なので，定理 4.1.6 より，ある実数 t に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(2,3,-4)\ ,$$
$$(x,y,x)=(-5,1,7)+t(2,3,-4)\ ,$$
$$(x,y,x)=(-5+2t,1+3t,7-4t)\ ,$$
$$x=2t-5 \text{ かつ } y=3t+1 \text{ かつ } x=7-4t\ ;$$

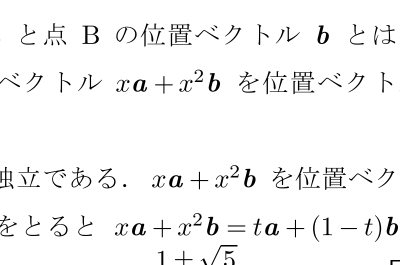
$2t-5=7-4t$ より $t=2$ ；よって，$x=-1$ ，$y=7$ ．故に $\mathrm{P}=(-1,7,-1)$ ．　[終]

[問題 4.1.6]　xyz 座標空間の直線 L について，$(4,9,-7)\in L$ で，ベクトル $(2,-3,5)$ が L の方向ベクトルであるとします．L に属す点 P の y 座標と z 座標とが等しいとします．この点 P を求めなさい．

定理 4.1.7　座標空間の点 A, B, C, P について，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ のとき，

$$\text{点 P が直線 AB に属す} \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad .$$

証明　点 A, B について $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とする．直線 AB を L とおく．定理 4.1.4 よりベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は直線 L の方向ベクトルである．点 B は直線 L に属すので，定理 4.1.6 より，各点 P について，



$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BA}}\ ,$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\bigl(\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\overrightarrow{\mathrm{CB}}\bigr)=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}}\ ,$$

故に

$$\text{P が直線 AB に属す} \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{CP}}=t\overrightarrow{\mathrm{CA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}} \quad .$$

（証明終り）

[例題]　座標空間において点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と点 B の位置ベクトル $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとする．次のような実数 x を求める：ベクトル $x\boldsymbol{a}+x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す．

　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないので，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形独立である．$x\boldsymbol{a}+x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す条件は，ある実数 t をとると $x\boldsymbol{a}+x^2\boldsymbol{b}=t\boldsymbol{a}+(1-t)\boldsymbol{b}$ ；よって，$x=t$ かつ $x^2=1-t$ なので，$x^2=1-x$ ，$x=-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ．　[終]

[問題 4.1.7]　座標空間において点 A の位置ベクトル $\boldsymbol{a}$ と点 B の位置ベクトル $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします．次のような実数 x を求めなさい：ベクトル $x^2\boldsymbol{a}-2x\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す．

——— 定理の証明

定理 4.1.1　座標空間における直線 L に属す任意の点 A 及び L の任意の方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ 及び座標空間の各点 P について，

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

証明　ベクトル $\boldsymbol{k}$ は L の方向ベクトルなので，座標空間のある点 B をとると，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } s \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{BP}}=s\boldsymbol{k} \quad .$$

$\mathrm{A}\in L$ なので，ある実数 r をとると $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=r\boldsymbol{k}$ ．

　各点 P について，$\mathrm{P}\in L$ ならば，ある実数 s をとると $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=s\boldsymbol{k}$ ．従って，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=s\boldsymbol{k}-r\boldsymbol{k}=(s-r)\boldsymbol{k}\ ,$$

$t=s-r$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k}$ ．逆に，ある実数 t をとると $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k}$ ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}=r\boldsymbol{k}+t\boldsymbol{k}=(r+t)\boldsymbol{k}\ ,$$

$s=r+t$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=s\boldsymbol{k}$ ，よって $\mathrm{P}\in L$ ．故に，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \quad .$$

$\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{0}$ なので，定理 3.5.4 より，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

（証明終り）

定理 4.1.2　座標空間において，零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ が直線 L のある方向ベクトルに平行であるならば，$\boldsymbol{v}$ は L の方向ベクトルである．

証明　L の方向ベクトルの一つを $\boldsymbol{k}$ とおく．L に属す点の一つを A とおく．定理 4.1.1 より，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ について $\boldsymbol{v} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}$ とする．定理 3.5.6 より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \quad .$$

$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ なので，定理 3.5.4 より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{v} \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{v} \quad .$$

これらのことより，

$$\mathrm{P}\in L \iff \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\boldsymbol{v} \quad .$$

故に $\boldsymbol{v}$ は L の方向ベクトルである．　（証明終り）

定理 4.1.3　座標空間において，一つの直線の任意の 2 個の方向ベクトルは平行である．

証明　ベクトル $\boldsymbol{k}_1$ と $\boldsymbol{k}_2$ とは直線 L の方向ベクトルであるとする．L に属す点 A をとる．定理 4.1.1 より，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_1 \quad \text{，かつ，} \quad \mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2 \quad .$$

直線 L に属す点で A と異なる点 B をとる．$\mathrm{B}\in L$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_1 \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2 \quad .$$

$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\boldsymbol{0}$ ．定理 3.5.6 より $\boldsymbol{k}_1 \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}_2$ ．　（証明終り）

定理 4.1.4　座標空間における直線 L に属す各点 A と B とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ ならば，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L の方向ベクトルである．

証明　直線 L に属す点 A と B とについて $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とする．L のある方向ベクトル $\boldsymbol{k}$ とをとる．$\mathrm{A}\in L$ なので，定理 4.1.1 より，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k} \quad .$$

$\mathrm{B}\in L$ なので $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{k}$ ．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\boldsymbol{0}$ なので，定理 4.1.2 より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ は L の方向ベクトルである．　（証明終り）

定理 4.1.5　座標空間の点 A と B と C とについて，

$$\text{A と B と C とが属す直線がある} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}} \quad .$$

証明　A と B と C とが属す直線 L があると仮定する．$\mathrm{A}=\mathrm{B}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{0}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ．$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ とする．定理 4.1.4 よりベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が L の方向ベクトルなので，定理 4.1.1 より，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \quad .$$

$\mathrm{C}\in L$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．

　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と仮定する．$\mathrm{A}=\mathrm{B}$ のとき，2 点 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ と C とが属す直線がある．$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ のとき，直線 AB を L とおくと，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が L の方向ベクトルなので，座標空間の各点 P について

$$\mathrm{P}\in L \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ,$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので $\mathrm{C}\in L$ ．点 A と B と C とは直線 L に属す．　（証明終り）