第3章の補遺　三角形の面積

定理 3. 補遺.1　座標空間において，点 A と B と C とに対してベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とを考えると，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ である．

証明　点 A と B と C とに対して，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とを考え，角 ACB の劣角を θ とおく．三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{CA}}\,\overline{\mathrm{CB}}\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\ .$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が θ なので，

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\ ,$$

$$(\sin\theta)^2=1-(\cos\theta)^2=1-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)^2=1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}\ ,$$

角度 θ は三角形の内角の大きさなので $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$ ，よって $\sin\theta\geq0$ なので，

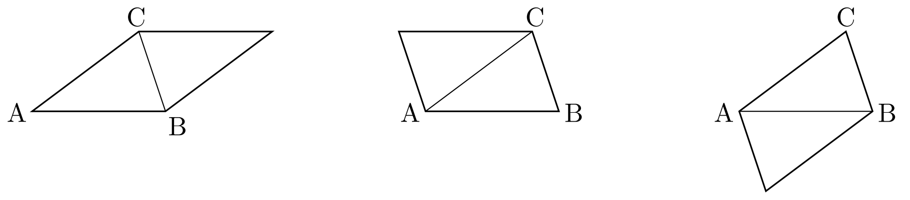
$$\sin\theta=\sqrt{(\sin\theta)^2}=\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}\ .$$

三角形 ABC の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta&=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\left(1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}\right)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

平面の点 A と B と C とに対して，A と B と C が頂点である平行四辺形は例えば以下のように3通り考えられます．



いずれの平行四辺形もその面積は三角形 ABC の面積の2倍です．このことより次の定理が成り立ちます．

定理 3. 補遺.2　座標空間において，点 A と B と C とに対してベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とを考えると，A と B と C が頂点である平行四辺形の面積は $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ である．

定理 3. 補遺.3　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A と B と C とについて，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a_1,a_2)$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b_1,b_2)$ である実数 a_1,a_2,b_1,b_2 に対して，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ であり，A と B と C を頂点とする平行四辺形の面積は $|a_1b_2-a_2b_1|$ である．

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ とを考える．定理3.8.1より，三角形 ABC の面積は $\dfrac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ である．定理3.8.2より，A と B と C が頂点である平行四辺形の面積は $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a_1,a_2)$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b_1,b_2)$ である実数 a_1,a_2,b_1,b_2 に対して，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ かつ $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ なので，

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2&=|(a_1,a_2)|^2|(b_1,b_2)|^2-\{(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)\}^2\\&=({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2\\&={a_1}^2{b_1}^2+{a_1}^2{b_2}^2+{a_2}^2{b_1}^2+{a_2}^2{b_2}^2-({a_1}^2{b_1}^2+2a_1b_1a_2b_2+{a_2}^2{b_2}^2)\\&=(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2-2a_1b_2a_2b_1\\&=(a_1b_2-a_2b_1)^2\ .\end{aligned}$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|\ .$$

A と B と C が頂点である平行四辺形の面積は

$$\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=|a_1b_2-a_2b_1|\ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　座標平面の点 $\mathrm{A}=(5,9)$ と $\mathrm{B}=(1,2)$ と $\mathrm{C}=(6,8)$ とを頂点とする三角形 ABC の面積を求める．

ベクトルの始点を B にすると僅かながら計算が簡単であろう．

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(5,9)-(1,2)=(4,7)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(6,8)-(1,2)=(5,6)\ .$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|4\cdot6-7\cdot5|=\frac{1}{2}|24-35|=\frac{1}{2}|-11|=\frac{11}{2}\ .$$

ベクトルの始点を A にすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,2)-(5,9)=(-4,-7)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(6,8)-(5,9)=(1,-1)\ ;$$

三角形 ABC の面積は

$$\frac{1}{2}|(-4)\cdot(-1)-1\cdot(-7)|=\frac{1}{2}|4+7|=\frac{1}{2}|-11|=\frac{11}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.補遺.1}}$　座標平面の点 $\mathrm{A}=(2,9)$ と $\mathrm{B}=(5,2)$ と $\mathrm{C}=(8,4)$ とを頂点とする三角形 ABC の面積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　座標平面の点 $\mathrm{A}=(7,5)$ と B と $\mathrm{C}=(2,1)$ と $\mathrm{D}=(8,4)$ とを頂点とする四角形 ABCD は平行四辺形であるとする．この平行四辺形の面積を求める．

ベクトルの始点を C にすると僅かながら計算が簡単であろう．

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(7,5)-(2,1)=(5,4)\ ,\qquad\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(8,4)-(2,1)=(6,3)\ .$$

平行四辺形 ABCD の面積は

$$|5\cdot3-4\cdot6|=|15-24|=|-9|=9\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.補遺.2}}$　座標平面の点 A と $\mathrm{B}=(9,4)$ と $\mathrm{C}=(1,-3)$ と $\mathrm{D}=(7,-5)$ を頂点とする四角形 ABCD は平行四辺形であるとします．この平行四辺形の面積を求めなさい．