§3.7 ベクトルの線形独立

複数のベクトルについて“線形独立”及び“線形従属”という概念があります；これらは，初めは意味が分かりにくいかもしれませんが，後々重要になる概念です.

定義　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるとは次の条件である：

任意の実数 p と q とについて， $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ならば $p=q=0$.

実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形従属であるとは，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立でないことである.

例題　ベクトル平面のベクトル $(2,3)$ と $(4,5)$ とは線形独立であることを示す.

実数 p と q とについて $p(2,3)+q(4,5)=\boldsymbol{0}$ とする.

$$(2p+4q,3p+5q)=(0,0)\ ,$$

$$2p+4q=0 \text{ かつ } 3p+5q=0\ .$$

$2p+4q=0$ より、 $p+2q=0$ ， $p=-2q$ ， これを $3p+5q=0$ に代入すると，$3(-2q)+5q=0$ ， $-q=0$ ， $q=0$ ； 更に $p=2\cdot(-2q)=0$ ． このように，$p(2,3)+q(4,5)=\boldsymbol{0}$ ならば $p=q=0$ ． 故にベクトル $(2,3)$ と $(4,5)$ とは線形独立である. 終

次の定理の証明は後にします.

定理 3.7.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは線形従属である .}$$

このように，2個のベクトルについて，“線形従属である”ことは“平行である”ことは意味が同じです.

定理 3.7.2　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは平行でない} \iff \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは線形独立である .}$$

証明　定理 3.7.1 より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは平行でない} &\iff \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは線形従属でない}\\ &\iff \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは線形独立である}\end{aligned}$$

（証明終り）

以下の定理の証明は後にします.

定理 3.7.3　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるならば，任意の実数 p,q について，

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \iff p=0 \text{ かつ } q=0\ ,$$

$$p\neq 0 \text{ または } q\neq 0 \iff p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}\ .$$

定理 3.7.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるならば，任意の実数 p,q,r,s について， $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ ならば $p=r$ かつ $q=s$.

例題　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとする. 次のような実数 x と y とを求める： $(2x+3y+4)\boldsymbol{a}+(5x+6y+7)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは， 平行でないので， 線形独立である. 定理 3.7.3 より，$(2x+3y+4)\boldsymbol{a}+(5x+6y+7)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ となる条件は， $2x+3y+4=0$ かつ $5x+6y+7=0$ ；この連立方程式を解くと $x=1$ かつ $y=-2$. 終

問題 3.7.1　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします. 次のような実数 x と y とを求めなさい： $(2x+3y-4)\boldsymbol{a}+(6x+7y-8)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例題　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとする. 次のような実数 x と y とを求める： $(5x-4y)\boldsymbol{a}+(7x-6y)\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}$.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは， 平行でないので， 線形独立である. 定理 3.7.4 より，$(5x-4y)\boldsymbol{a}+(7x-6y)\boldsymbol{b}=7\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}$ となる条件は， $5x-4y=7$ かつ $7x-6y=9$ ；この連立方程式を解くと $x=3$ かつ $y=2$. 終

問題 3.7.2　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします. 次のような実数 x と y とを求めなさい： $(5x+6y)\boldsymbol{a}+(7x+8y)\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$.

例題　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとする. 次のような実数 x を求める：ベクトル $x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ と $2\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$ とが平行である.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは，平行でないので，線形独立である. 定理 3.7.3 より， $2\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 定理 3.5.4 より， $x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b} \mathbin{/\!/} 2\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b}$ である条件は， ある実数 k について $x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=k(2\boldsymbol{a}+7\boldsymbol{b})$ つまり $x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=2k\boldsymbol{a}+7k\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形独立なので，定理 3.7.4 より， $x=2k$ かつ $3=7k$. これらの方程式より $x=\dfrac{6}{7}$. 終

問題 3.7.3　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします. 次のような実数 x 求めなさい：ベクトル $x\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ と $2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ とが平行である.

問題 3.7.4　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは平行でないとします. 次のような実数 x 求めなさい：ベクトル $x\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ と $3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}$ とが平行である.

3次元ベクトル空間では，2個のベクトルに関する線形独立の定義は3個のベクトルに関する線形独立の定義に拡張できます.

定義　3次元の実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とが線形独立であるとは次の条件である：

任意の実数 p と q と r とについて， $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ ならば $p=q=r=0$.

3次元の実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とが線形従属であるとは，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とが線形独立でないことである.

定理 3.7.5　3次元実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とが線形独立であるとき，任意の実数 p,q,r について，

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0} \iff p=0 \text{ かつ } q=0 \text{ かつ } r=0\ ,$$

$$p\neq 0 \text{ または } q\neq 0 \text{ または } r\neq 0 \iff p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}\ .$$

定理 3.7.6　3次元実ベクトル空間の実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とが線形独立であるならば，任意の実数 p,q,r,s,t,u について， $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}=s\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}+u\boldsymbol{c}$ ならば $p=s$ かつ $q=t$ かつ $r=u$.

——— 定理の証明

定理 3.7.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とは線形従属である .}$$

証明　$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ と仮定する. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは，同じ向きであるかまたは逆の向きである. 定理 3.4.4 より， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ または $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$. よって， $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ または $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. どちらのときも， $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ または $|\boldsymbol{b}|\neq 0$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形従属である. $|\boldsymbol{a}|=0$ かつ $|\boldsymbol{b}|=0$ のとき， $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ なので，$1\cdot\boldsymbol{a}+1\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ，よって $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形従属である. 故に， $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ ならば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形従属である.

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形従属であると仮定する. $p\neq 0$ または $q\neq 0$ でありかつ $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ である実数 p と q とがある. $p\neq 0$ とすると，$p\boldsymbol{a}=-q\boldsymbol{b}$ ， $\boldsymbol{a}=-\dfrac{q}{p}\boldsymbol{b}$ ，従って定理 3.5.4 より $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$. $q\neq 0$ とすると，$q\boldsymbol{b}=-p\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{b}=-\dfrac{p}{q}\boldsymbol{a}$ ，従って定理 3.5.4 より $\boldsymbol{b} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{a}$. どちらのときのも $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$. （証明終り）

定理 3.7.3　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるならば，任意の実数 p と q とについて，

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0} \iff p=0 \text{ かつ } q=0\ .$$

証明　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるとする.

$p=0$ かつ $q=0$ ならば，

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=0\boldsymbol{a}+0\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\ .$$

実数 p と q とについて $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ とする. 仮に $p\neq 0$ または $q\neq 0$ ならば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形従属である. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形独立なので，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは線形従属でない，よって $p=0$ かつ $q=0$ である. （証明終り）

定理 3.7.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ について，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であるならば，任意の実数 p,q,r,s について， $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ ならば $p=r$ かつ $q=s$.

証明　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立であると仮定する. 実数 p,q,r,s について，$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}=r\boldsymbol{a}+s\boldsymbol{b}$ とする. $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}-r\boldsymbol{a}-s\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ， $(p-r)\boldsymbol{a}+(q-s)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが線形独立なので，定理 3.7.3 より， $p-r=0$ かつ $q-s=0$ ，よって $p=r$ かつ $q=s$. （証明終り）