§3.6　ベクトルの平行と垂直

以下の定理の証明は後にします.

定理 3.6.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 次のことが成り立つ.

(1)　$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ ならば, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.

(2)　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$ ならば, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.

特に平面ベクトルの平行と垂直について以下の定理が成り立ちます.

定理 3.6.2　ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$.

――――― 定理の証明

定理 3.6.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき, 次のことが成り立つ.

(1)　$\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ ならば, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.

(2)　$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$ ならば, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする. $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ なので, 定理 3.5.4 より, ある実数 k をとると $\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ より $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ なので,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = (k\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = k(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = 0 \ ,$$

従って $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする. $\boldsymbol{c} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ なので, 定理 3.5.4 より, ある実数 k をとると $\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ より $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ なので,

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot k\boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = 0 \ ,$$

従って $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{c}$.　（証明終り）

定理 3.6.2　ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$.

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ とおく. $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ より $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ よって $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$. $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{c}$ より $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0$ よって $b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$. $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ より, $b_1 \neq 0$ または $b_2 \neq 0$. $b_1 \neq 0$ のとき, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ より $a_1 = -\dfrac{a_2 b_2}{b_1}$ なので $a_1 c_2 = -\dfrac{a_2 b_2 c_2}{b_1}$, $b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$ より $c_1 = -\dfrac{b_2 c_2}{b_1}$ なので $a_2 c_1 = -\dfrac{a_2 b_2 c_2}{b_1}$, 従って $a_1 c_2 = a_2 c_1$. $b_2 \neq 0$ のとき, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ より $a_2 = -\dfrac{a_1 b_1}{b_2}$ なので $a_2 c_1 = -\dfrac{a_1 b_1 c_1}{b_2}$, $b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$ より $c_2 = -\dfrac{b_1 c_1}{b_2}$ なので $a_1 c_2 = -\dfrac{a_1 b_1 c_1}{b_2}$, 従って $a_1 c_2 = a_2 c_1$. よってどちらのときも $a_1 c_2 = a_2 c_1$. 故に定理 3.6.1 より $(a_1, a_2) \mathbin{/\!/} (c_1, c_2)$ つまり $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{c}$.　（証明終り）