§3.5　ベクトルの平行

定義　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが平行であるとは，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるかまたは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであることである．ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが平行であることを次のように書き表す： $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ ．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが平行であることを，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ方向であるともいいます[1)]．ですから，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは，逆の向きのときも同じ方向です．

次のことを思い起こして下さい：各実数 a, b について

$$a = \pm b \iff a^2 = b^2 \iff \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \iff |a| = |b| \ .$$

定理 3.5.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \iff |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \ .$$

証明　$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ とは，定義より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるかまたは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであること，つまり $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ または $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ となることである：

$$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \ .$$

（証明終り）

定理 3.5.2　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ について $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{0}$ ．

証明　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = 0$ なので，$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}| = |0| = 0$ ．　$|\boldsymbol{0}| = 0$ なので $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{0}| = |\boldsymbol{a}| \times 0 = 0$ ．従って $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{0}|$ なので，定理 3.5.1 より $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{0}$ ．

定理 3.5.3　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a} \ .$$

証明　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ なので，定理 3.5.1 より，

$$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b} \iff |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \iff |\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}| \iff \boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a} \ .$$

（証明終り）

以下の定理の証明は後にします．

定理 3.5.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a} &\iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \ \text{またはある実数}\ k\ \text{をとると}\ \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \\ &\iff \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \ \text{ならばある実数}\ k\ \text{をとると}\ \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数を表す変数 x, y について次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めなさい：3次元実ベクトル $(x, y, 6)$ と $(5, 2, y)$ とが平行である．

$(5, 2, y) \neq \boldsymbol{0}$ なので，$(x, y, 6) \,/\!/\, (5, 2, y)$ である条件は，ある実数 k をとると $(x, y, 6) = k(5, 2, y)$ ，つまり，ある実数 k をとると $x = 5k$ かつ $y = 2k$ かつ $6 = yk$ ； $6 = 2k \cdot k$ なので，$k^2 = 3$ ，$k = \pm\sqrt{3}$ ；よって，$x = 5k = \pm 5\sqrt{3}$ かつ $y = 2k = \pm 2\sqrt{3}$ ．3次元実ベクトル $(x, y, 6)$ と $(5, 2, y)$ とが平行である条件は，$x = \pm 5\sqrt{3}$ かつ $y = \pm 2\sqrt{3}$（複号同順）．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.1}}$　実数を表す変数 x, y について次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めなさい：3次元実ベクトル $(x, 4, z)$ と $(9, x, 3)$ とが平行である．

平面ベクトルの平行に関しては次の定理が成り立ちます．

定理 3.5.5　任意の実数 a と b と c と d とについて，

$$(a, b) \,/\!/\, (c, d) \iff ad = bc \ .$$

証明　定理 3.5.1 より，

$$(a, b) \,/\!/\, (c, d) \iff \bigl|(a, b)\cdot(c, d)\bigr| = \bigl|(a, b)\bigr|\bigl|(c, d)\bigr| \ . \tag{1}$$

$|(a, b)\cdot(c, d)| \geq 0$ かつ $\bigl|(a, b)\bigr| \geq 0$ かつ $\bigl|(c, d)\bigr| \geq 0$ なので，

$$\begin{aligned}\bigl|(a, b)\cdot(c, d)\bigr| = \bigl|(a, b)\bigr|\bigl|(c, d)\bigr| &\iff \bigl|(a, b)\cdot(c, d)\bigr|^2 = \bigl|(a, b)\bigr|^2\bigl|(c, d)\bigr|^2 \\ &\iff \bigl|(a, b)\bigr|^2\bigl|(c, d)\bigr|^2 - \{(a, b)\cdot(c, d)\}^2 = 0 \ , \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\bigl|(a, b)\bigr|^2\bigl|(c, d)\bigr|^2 - \{(a, b)\cdot(c, d)\}^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2 + d^2 - (a^2c^2 + 2acbd + d^2) \\ &= (ad)^2 - 2adbc + (bc)^2 \\ &= (ad - bc)^2 \ ,\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\bigl|(a, b)\bigr|^2\bigl|(c, d)\bigr|^2 - \{(a, b)\cdot(c, d)\}^2 = 0 &\iff (ad-bc)^2 = 0 \\ &\iff ad - bc = 0 \\ &\iff ad = bc \ . \end{aligned} \tag{3}$$

(1) と (2) と (3) とより

$$(a, b) \,/\!/\, (c, d) \iff ad = bc \ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にする：ベクトル平面においてベクトル $(x, x+5)$ とベクトル $(3, 7)$ とは平行である．

$$(3, 7) \,/\!/\, (x, x+5) \iff 3(x+5) = 7x \iff 4x = 15 \iff x = \frac{15}{4} \ .$$

つまり $x = \dfrac{15}{4}$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.2}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい：ベクトル平面のベクトル $(x, 2)$ と $(5, x-3)$ とは平行である．

$\boxed{\text{例題}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にする：座標平面の点 $\mathrm{A} = (3, 4)$ と $\mathrm{B} = (x, 6)$ と $\mathrm{C} = (3, x)$ と $\mathrm{D} = (x, 7)$ とに対して，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが平行である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (x, 6) - (3, 4) = (x-3, 2) \ , \\ \overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (x, 7) - (3, x) = (x-3, 7-x) \ .\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{CD}} &\iff (x-3, 2) \,/\!/\, (x-3, 7-x) \iff (x-3)(7-x) = 2(x-3) \\ &\iff 2(x-3) - (x-3)(7-x) = 0 \iff (x-3)(x-5) = 0 \\ &\iff x = 3 \ \text{または}\ x = 5 \ .\end{aligned}$$

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが平行である条件は，$x = 3$ または $x = 5$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.5.3}}$　変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい：座標平面の点 $\mathrm{A} = (4, 6)$ と $\mathrm{B} = (x, 9)$ と $\mathrm{C} = (8, x)$ と $\mathrm{D} = (2x, 7)$ とについて，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが平行である．

ベクトルの平行について以下の定理が成り立ちます．

定理 3.5.6　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．

定理 3.5.7　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ と及び任意の実数 p と q とについて，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ならば，$p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．

―――― 定理の証明

定理 3.5.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a} &\iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \ \text{またはある実数}\ k\ \text{をとると}\ \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \\ &\iff \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \ \text{ならばある実数}\ k\ \text{をとると}\ \boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a} \ .\end{aligned}$$

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a}$ とする．$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは同じ向きであるかまたは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とは逆の向きである．$\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，定理 3.4.4 より，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるとき $\boldsymbol{b} = \dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ ，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであるとき $\boldsymbol{b} = -\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ ．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ またはある実数 k について $\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ とする．$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ のとき，定理 3.5.2 より $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a}$ ．　$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{a}$ となる実数 k があるとする．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}\cdot(k\boldsymbol{a}) = k(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) = k|\boldsymbol{a}|^2 \ , \\ |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| &= \bigl|k|\boldsymbol{a}|^2\bigr| = |k||\boldsymbol{a}|^2 \ .\end{aligned}$$

また，$|\boldsymbol{b}| = |k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$ なので，

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||k||\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|^2 \ .$$

従って $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ なので，定理 3.5.1 より $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ つまり $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{a}$ ．

（証明終り）

定理 3.5.6　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{b}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．定理 3.5.4 より，$\boldsymbol{a} = h\boldsymbol{b}$ となる実数 h があり，$\boldsymbol{c} = k\boldsymbol{b}$ となる実数 k がある．従って，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} &= (h\boldsymbol{b})\cdot(k\boldsymbol{b}) = hk(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) = hk|\boldsymbol{b}|^2 \ , \\ |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}| &= |h\boldsymbol{b}\cdot k\boldsymbol{b}| = \bigl|hk(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})\bigr| = |hk||\boldsymbol{b}|^2 \ .\end{aligned}$$

また，$|\boldsymbol{a}| = |h\boldsymbol{b}| = |h||\boldsymbol{b}|$ ，$|\boldsymbol{c}| = |k\boldsymbol{b}| = |k||\boldsymbol{b}|$ なので，

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}| = |h||\boldsymbol{b}||k||\boldsymbol{b}| = |hk||\boldsymbol{b}|^2 \ .$$

$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|$ なので，定理 3.5.1 より $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．　（証明終り）

定理　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ と及び任意の実数 p と q とについて，$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ならば，$p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ とについて $\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ とする．$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のときと $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ のときとに場合分けする．

$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ のとき，定理 3.5.2 より $p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．　$\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$ とする．$\boldsymbol{a} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ かつ $\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ なので，定理 3.5.4 より，$\boldsymbol{a} = h\boldsymbol{c}$ となる実数 h があり，$\boldsymbol{b} = k\boldsymbol{c}$ となる実数 k がある．従って，

$$p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} = p(h\boldsymbol{c}) + q(k\boldsymbol{c}) = (ph + qk)\boldsymbol{c} \ .$$

定理 3.5.4 より $p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b} \,/\!/\, \boldsymbol{c}$ ．　（証明終り）

---

1) 数学では“向き”という言葉と“方向”という言葉とでは少し意味が違います．例えば，数学的には，東西は方向であり，この方向に東向きと西向きとがあります．このように，ある向きとその反対の向きとを併せて一つの方向になります．