§3.4　ベクトルの向き

次の定理が成り立ちます.

定理 3.4.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき,

$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが成す角度が } 0^\circ \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \ ,$$
$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが成す角度が } 180^\circ \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \ .$$

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．このとき $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ ． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度を θ とおく．定理 3.1 より

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \ .$$

$\theta = 0^\circ$ ならば， $\cos\theta = \cos 0^\circ = 1$ なので， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ．逆に， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ならば， $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ ， $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので $\cos\theta = 1$ ， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので $\theta = 0^\circ$ ．

$\theta = 180^\circ$ ならば， $\cos\theta = \cos 180^\circ = -1$ なので， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ．逆に， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ならば， $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ ， $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので $\cos\theta = -1$ ， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので $\theta = 180^\circ$ ．（証明終り）

この定理より，ベクトルの向きについて次のように定義します.

定義　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

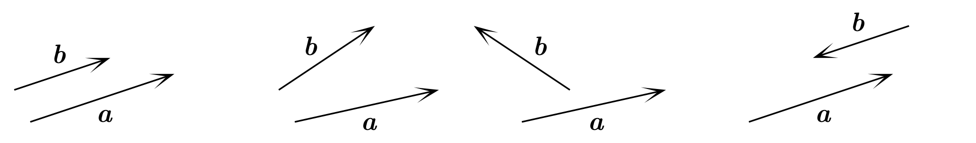
$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるとは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ となることであり,

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであるとは $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ となることである.

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるとは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が 0° であることであり,

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであるとは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が 180° であることです．例えば次のようになります.



同じ向き　　同じ向きでも逆の向きでもない　　逆の向き

以下の定理の証明は後回しにします.

定理 3.4.2　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \text{ かつ } \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが同じ向きならば } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \ ,$$
$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \text{ かつ } \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが逆の向きならば } \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \ .$$

定理 3.4.3　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び任意の実数 k_1 と k_2 とについて,

$k_1k_2 \geq 0$ のとき ベクトル $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは同じ向きであり,

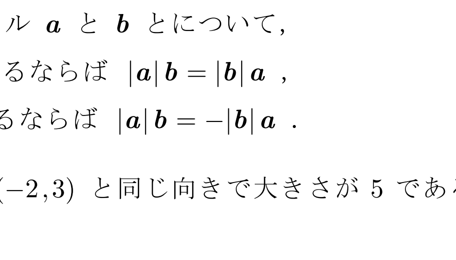
$k_1k_2 \leq 0$ のとき ベクトル $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは逆の向きである.

定理 3.4.3 と定理 1.8.3 とを併せると次のことが分かります: 実数 k に対して，実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $k\boldsymbol{a}$ とを比べると,

$k \geq 0$ のとき， $k\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが $|k|$ 倍のベクトルである；

$k \leq 0$ のとき， $k\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と逆の向きで大きさが $|k|$ 倍のベクトルである.

$\boxed{\text{例}}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさを a とおくと，例えば右図のように，ベクトル $\frac{5}{2}\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と同じ向きで大きさが $\frac{5}{2}a$ のベクトルで，ベクトル $-\frac{3}{2}\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}$ と逆の向きで大きさが $\frac{3}{2}a$ のベクトルです.



$\boxed{\text{終}}$

定理 3.4.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが同じ向きであるならば } |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} \ ,$$
$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが逆の向きであるならば } |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　ベクトル平面において，ベクトル $(-2,3)$ と同じ向きで大きさが 5 であるベクトルを求める.

〔解説〕 ベクトル $\boldsymbol{a} = (-2,3)$ と同じ向きで大きさが 5 のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおく． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ との向きが同じなので， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{x} = \dfrac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ ． $\boldsymbol{x}$ の大きさは 5 なので $|\boldsymbol{x}| = 5$ ，また $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$ ．従って求めるベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{5}{\sqrt{13}}(-2,3) = \left(-\frac{10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}}\right) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.4.1}}$　ベクトル平面において，ベクトル $(4,-3)$ と同じ向きで大きさが 7 であるベクトルを求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　ベクトル平面において，ベクトル $(5,-3)$ と逆の向きで大きさが 7 であるベクトルを求める.

〔解説〕 ベクトル $\boldsymbol{a} = (5,-3)$ と逆の向きで大きさが 7 であるベクトルを $\boldsymbol{x}$ とおく． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ との向きが逆なので， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} = -|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}$ ， $\boldsymbol{x} = -\dfrac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ ． $\boldsymbol{x}$ の大きさは 7 なので $|\boldsymbol{x}| = 7$ ，また $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$ ．従って求めるベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = -\frac{|\boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = -\frac{7}{\sqrt{34}}(5,-3) = \left(-\frac{35}{\sqrt{34}}, \frac{21}{\sqrt{34}}\right) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.4.2}}$　ベクトル平面において，ベクトル $(-2,5)$ と逆の向きで大きさが 3 であるベクトルを求めなさい.

――――　定理の証明

定理 3.4.2　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \text{ かつ } \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが同じ向きならば } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \ ,$$
$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| \text{ かつ } \boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが逆の向きならば } \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b} \ .$$

証明　ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きとする． $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ なので,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 \ ; \end{aligned}$$

更に $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ とすると,

$$|\boldsymbol{a}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = 2|\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{b}|^2 = 0 \ ,$$

よって $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = 0$ なので， $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| = 0$ ，定理 1.6.3 より $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ，故に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ ．

ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きとする． $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ なので,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| + 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \\ &= |\boldsymbol{a}| - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 \ ; \end{aligned}$$

更に $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$ とすると,

$$|\boldsymbol{a}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = 2|\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{b}|^2 = 0 \ ,$$

よって $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = 0$ なので， $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| = 0$ ，定理 1.6.3 より $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ ，故に $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ ．（証明終り）

定理 3.4.3　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び任意の実数 k_1 と k_2 とについて,

$k_1k_2 \geq 0$ のとき ベクトル $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは同じ向きであり,

$k_1k_2 \leq 0$ のとき ベクトル $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは逆の向きである.

証明

$$(k_1\boldsymbol{a})\cdot(k_2\boldsymbol{a}) = k_1\{\boldsymbol{a}\cdot(k_2\boldsymbol{a})\} = k_1\{k_2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\} = k_1k_2|\boldsymbol{a}|^2 \ .$$

また，定理 1.6.4 より $|k_1\boldsymbol{a}| = |k_1||\boldsymbol{a}|$ ， $|k_2\boldsymbol{a}| = |k_2||\boldsymbol{a}|$ なので,

$$|k_1\boldsymbol{a}||k_2\boldsymbol{a}| = |k_1||\boldsymbol{a}||k_2||\boldsymbol{a}| = |k_1||k_2||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| = |k_1k_2||\boldsymbol{a}|^2 \ .$$

$k_1k_2 \geq 0$ のとき， $|k_1k_2| = k_1k_2$ なので

$$(k_1\boldsymbol{a})\cdot(k_2\boldsymbol{a}) = k_1k_2|\boldsymbol{a}|^2 = |k_1k_2||\boldsymbol{a}|^2 = |k_1\boldsymbol{a}||k_2\boldsymbol{a}| \ ,$$

よって $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは同じ向きである． $k_1k_2 \leq 0$ のとき， $|k_1k_2| = -k_1k_2$ より $k_1k_2 = -|k_1k_2|$ なので

$$(k_1\boldsymbol{a})\cdot(k_2\boldsymbol{a}) = k_1k_2|\boldsymbol{a}|^2 = -|k_1k_2||\boldsymbol{a}|^2 = -|k_1\boldsymbol{a}||k_2\boldsymbol{a}| \ ,$$

よって $k_1\boldsymbol{a}$ と $k_2\boldsymbol{a}$ とは逆の向きである.（証明終り）

定理 3.4.4　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが同じ向きであるならば } |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} \ ,$$
$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが逆の向きであるならば } |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a} \ .$$

証明　内積の性質より,

$$(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}|\{\boldsymbol{b}\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a})\} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \ .$$

$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ， $\big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big| = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|$ なので,

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big| = \big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big| \ ,$$

$$\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big|\big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \ .$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが同じ向きであるならば， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ なので,

$$(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \ ,$$

よって $(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = \big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big|\big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big|$ なので， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ と $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ とは同じ向きである． $\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big| = \big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big|$ なので，定理 3.4.2 より， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ ．

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが逆の向きであるならば， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ なので,

$$(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|) = -|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \ ,$$

よって $(|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\cdot(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}) = -\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big|\big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big|$ なので， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ と $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ とは逆の向きである． $\big||\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\big| = \big||\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}\big|$ なので，定理 3.4.2 より， $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b} = -|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}$ ．（証明終り）