§ 3.3 ベクトルの垂直

次の定理が成り立ちます.

定理 3.3.1 実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき,

$$\boldsymbol{a} \text{ と } \boldsymbol{b} \text{ とが成す角度が } 90^\circ \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \ .$$

証明 ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする. $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$. $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度を θ とおく. 定理 3.1 より

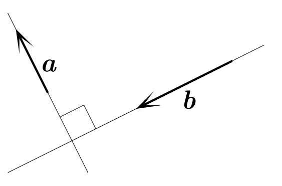
$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \ .$$

$\theta = 90^\circ$ ならば, $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$ なので, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. 逆に, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ ならば, $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = 0$, $|\boldsymbol{a}| \neq 0$ かつ $|\boldsymbol{b}| \neq 0$ なので $\cos\theta = 0$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ なので $\theta = 90^\circ$. （証明終り）

この定理より, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが**垂直**であることを次のように定義します.

定義 実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが垂直であるとは, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ となることである. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが垂直であることを次のように書き表す: $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが垂直であるとは, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が 90° であることなので, 例えば右図のように $\boldsymbol{a}$ を表す有向線分と $\boldsymbol{b}$ を表す有向線分とが垂直であることです.



定理 3.3.2 実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ について $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{0}$.

証明 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{0} = 0$ なので $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{0}$. （証明終り）

定理 3.3.3 実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて,

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \ .$$

証明 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ なので,

$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \iff \boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a} \ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にする: 平面ベクトル $(x,x+2)$ と $(3,4)$ とが垂直である.

$$\begin{aligned}(x,x+2) \perp (3,4) &\iff (x,x+2)\cdot(3,4) = 0 \\ &\iff 3x+4(x+2) = 0 \iff 7x+8 = 0 \\ &\iff x = -\frac{8}{7} \ .\end{aligned}$$

ベクトル $(x,x+2)$ と $(3,4)$ とが垂直である条件は $x = -\frac{8}{7}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.1}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい: 平面ベクトル $(x,3)$ と $(x,-2)$ とが垂直である.

$\boxed{\text{例題}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にする: 3次元実ベクトル $(x,5,6)$ と $(x,x,1)$ とが垂直である.

$$\begin{aligned}(x,5,6) \perp (x,x,1) &\iff (x,5,6)\cdot(x,x,1) = 0 \\ &\iff x^2+5x+6 = 0 \iff (x+2)(x+3) = 0 \\ &\iff x = -2, -3 \ .\end{aligned}$$

ベクトル $(x,5,6)$ と $(x,x,1)$ とが垂直である条件は, $x = -2$ または $x = -3$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.2}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい: 3次元実ベクトル $(x,-8,3)$ と $(x,x,2)$ とが垂直である.

$\boxed{\text{例題}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にする: 座標平面の点 $\mathrm{A} = (2,3)$ と $\mathrm{B} = (x,7)$ と $\mathrm{C} = (5,x)$ と $\mathrm{D} = (x,2)$ とに対して, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが垂直である.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= (x,7)-(2,3) = (x-2,4) \ , \\ \overrightarrow{\mathrm{CD}} &= (x,2)-(5,x) = (x-5,2-x) \ .\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{CD}} &\iff (x-2,4) \perp (x-5,2-x) \\ &\iff (x-2,4)\cdot(x-5,2-x) = 0 \\ &\iff (x-2)(x-5)+4(2-x) = 0 \\ &\iff (x-2)(x-9) = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ または } x = 9 \ .\end{aligned}$$

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが垂直である条件は, $x = 2$ または $x = 9$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.3}}$ 変数 x について次の条件をなるべく簡単にしなさい: 座標平面の点 $\mathrm{A} = (5,3)$ と $\mathrm{B} = (9,x)$ と $\mathrm{C} = (2x,1)$ と $\mathrm{D} = (6,x)$ とについて, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とが垂直である.

$\boxed{\text{例題}}$ ベクトル平面において, ベクトル $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルを求める.
〔解説〕 $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルを (x,y) とおく. $(2,3) \perp (x,y)$ なので, $(2,3)\cdot(x,y) = 0$, よって

$$2x+3y = 0 \ . \tag{1}$$

(x,y) は単位ベクトルなので,

$$x^2+y^2 = 1 \ . \tag{2}$$

方程式 (1) より $y = -\frac{2}{3}x$, これを方程式 (2) に代入すると, $x^2+\frac{4}{9}x^2 = 1$, $\frac{13}{9}x^2 = 1$, $x^2 = \frac{9}{13}$, $x = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}$. $y = -\frac{2}{3}x$ なので, $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき $y = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. 従って $(x,y) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ または $(x,y) = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. 故に, $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルは $\left(\frac{3}{\sqrt{13}},-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ と $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}},\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.4}}$ ベクトル平面において, ベクトル $(-6,8)$ に垂直な単位ベクトルを求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$ 3次元実ベクトル平面において, ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つを求めなさい.
〔解説〕 ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直なベクトルを (x,y,z) とおく.

$$\begin{aligned}&(2,3,-2)\cdot(x,y,z) = 0 \text{ なので } 2x+3y-2z = 0 \ \cdots(1) \ . \\ &(3,4,-4)\cdot(x,y,z) = 0 \text{ なので } 3x+4y-4z = 0 \ \cdots(2) \ .\end{aligned}$$

等式 (1) より $4x+6y-4z = 0$, これから等式 (2) を辺々引くと, $x+2y = 0$, $x = -2y$. 等式 (1) より $2z = 2x+3y = -4y+3y = -y$, $z = -\frac{1}{2}y$. $y = -2$ とする. $x = 4$ かつ $z = 1$ ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つは $(4,-2,1)$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.5}}$ 3次元実ベクトル空間において, ベクトル $(3,-2,2)$ 及び $(4,-3,5)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つを求めなさい.

定理 3.3.4 座標空間の任意の点 A と B と C とについて, $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ かつ $\mathrm{B} \neq \mathrm{C}$ のとき, 角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ について,

$$\text{角 ABC が直角である} \iff \overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}} \ .$$

証明 点 A と B と C とについて $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ かつ $\mathrm{B} \neq \mathrm{C}$ とする. $0^\circ \leq \angle\mathrm{ABC} \leq 180^\circ$ なので,

$$\text{角 ABC が直角である} \iff \angle\mathrm{ABC} = 90^\circ \iff \cos\angle\mathrm{ABC} = 0 \ .$$

$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| \neq 0$, $\mathrm{B} \neq \mathrm{C}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| \neq 0$. 定理 3.2.2 より $\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}$ なので,

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = 0 \iff \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}} \ .$$

故に

$$\text{角 ABC が直角である} \iff \overrightarrow{\mathrm{BA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}} \ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$ 次のような実数 x を求めなさい: 座標平面の点 $\mathrm{A} = (2,1)$ と $\mathrm{B} = (7,4)$ と $\mathrm{P} = (x,0)$ とについて角 APB は直角である.
〔解説〕 定理 3.3.4 より, 角 APB が直角であることは, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ とが垂直であることと同値である. $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (2,1)-(x,0) = (2-x,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = (7,4)-(x,0) = (7-x,4)$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}} &\iff (2-x,1) \perp (7-x,4) \iff (2-x,1)\cdot(7-x,4) = 0 \\ &\iff (2-x)(7-x)+4 = 0 \iff x^2-9x+18 = 0 \\ &\iff (x-3)(x-6) = 0 \\ &\iff x = 3 \text{ または } x = 6 \ .\end{aligned}$$

故に 3 と 6 とである. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.6}}$ 次のような実数 y を求めなさい: 座標平面の点 $\mathrm{A} = (2,9)$ と $\mathrm{B} = (3,2)$ と $\mathrm{P} = (0,y)$ とについて角 APB は直角である.

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを示す: 実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対して, ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$ とは垂直である.
〔解答〕

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}\} &= \boldsymbol{a}\cdot\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}\}-\boldsymbol{a}\cdot|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \\ &= 0 \ .\end{aligned}$$

故に $\boldsymbol{a}$ と $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$ とは垂直である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 3.3.7}}$ 次のことを示しなさい: 実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対して, ベクトル $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ と $|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}-|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}$ とは垂直である.