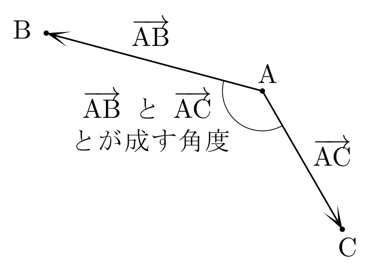
§3.2 ベクトルが成す角度と図形

次の定理は直感的に分かると思います．その証明は後にします．



定理 3.2.1　座標空間の任意の点 A と B と C とについて，$\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ かつ $\mathrm{A} \neq \mathrm{C}$ のとき，角 BAC の劣角 $\angle\mathrm{BAC}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが成す角度である．

例題　座標空間の3点 A と B と C とについて，$\overline{\mathrm{AB}}=5$ ，$\overline{\mathrm{AC}}=7$ ，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求める．

〔解説〕 定理3.2.1よりベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが成す角度は $\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ なので，定理3.1より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 120^\circ \ .$$

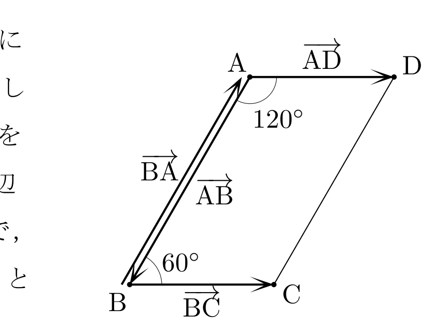
ここで，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \overline{\mathrm{AB}}=5$ ，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \overline{\mathrm{AC}}=7$ ，$\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 120^\circ = 5\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{2} \ .$$

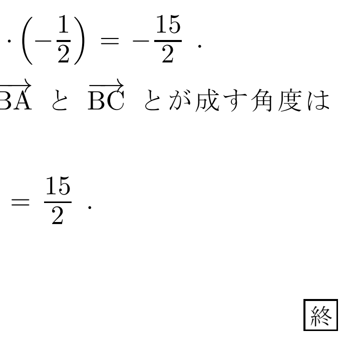
よって $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = -\dfrac{35}{2}$ ．　終

問題 3.2.1　座標空間の3点 P と Q と R とについて，$\overline{\mathrm{QP}}=7$ ，$\overline{\mathrm{QR}}=5$ ，$\angle\mathrm{PQR}=150^\circ$ とします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を求めなさい．

座標空間の点 P と Q と R と S とについて，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ とが成す角度を考えます．右図のように，点 R が点 P に移るような平行移動によって，点 S が点 T に移るとします．定理1.4.1より $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ なので，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}$ とが成す角度は定理3.2.1より $\angle\mathrm{QPT}$ です．



例　座標空間の相異なる3点 A と B と C とについて，$\overline{\mathrm{AB}}=5$ ，$\overline{\mathrm{BC}}=3$ ，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ とします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を求めます．点 D を，四角形 ABCD が平行四辺形になるようにとります．$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ なので，$\angle\mathrm{BAD}=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ ．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ とが成す角度は 135° です．よって，



$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos 120^\circ = 5\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{2} \ .$$

あるいは次のように考えることもできます．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とが成す角度は 60° なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BA}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cdot\cos 60^\circ = 5\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \ .$$

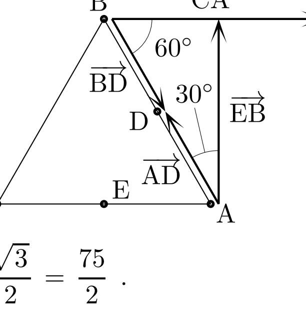
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}} = -\frac{15}{2} \ .$$

終

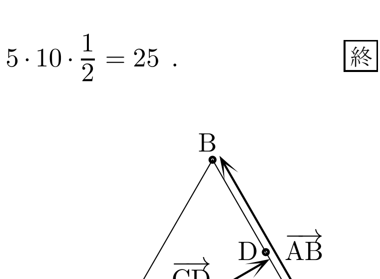
問題 3.2.2　座標空間の点 A と B と C とについて，$\overline{\mathrm{AB}}=5$ ，$\overline{\mathrm{BC}}=7$ ，$\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$ とします．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ との内積 $\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ を求めなさい．

例題　座標空間の相異なる3点 A, B, C とについて，三角形 ABC は正三角形であり，その各辺の長さが 10 であるとする．線分 AB の中点を D とおき，線分 AC の中点を E とおく．ベクトルの内積 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ 及び $\overrightarrow{\mathrm{BD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を計算する．



正三角形 ABC の各辺の長さが 10 なので，

$$\overline{\mathrm{AD}}=5 \ ,$$
$$\overline{\mathrm{EB}}=5\sqrt{3} \ ,$$
$$\overline{\mathrm{BD}}=5 \ ,$$
$$\overline{\mathrm{CA}}=10 \ .$$



ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$ とが成す角度は 30° なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EB}} = \overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{EB}}\cdot\cos 30^\circ = 5\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{75}{2} \ .$$

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ とが成す角度は 60° なので，

$$\overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}\cdot\cos 60^\circ = \overline{\mathrm{BD}}\cdot\overline{\mathrm{CA}}\cdot\cos 60^\circ = 5\cdot 10\cdot\frac{1}{2} = 25 \ .$$

終

問題 3.2.3　座標空間の相異なる3点 A と B と C とについて，三角形 ABC は正三角形であり，その各辺の長さが 10 であるとします．線分 AB の中点を D とおき，線分 AC の中点を E とおきます．ベクトルの内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ 及び $\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を計算しなさい．

定理3.1と定理3.2.1とより次の定理が導かれます．

定理 3.2.2　座標空間の任意の点 A と B と C とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ かつ $\mathrm{B}\neq\mathrm{C}$ のとき，角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ について，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} \ .$$

証明　$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ かつ $\mathrm{B}\neq\mathrm{C}$ とする．定理3.2.1より，角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とが成す角度なので，定理3.1より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos\angle\mathrm{ABC} \ .$$

$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\neq 0$ ，$\mathrm{B}\neq\mathrm{C}$ より $\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\neq 0$ なので，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}$ ．

（証明終り）

例題　座標平面の点 $\mathrm{A}=\left(8,4\sqrt{3}\right)$ と $\mathrm{B}=\left(7,2\sqrt{3}\right)$ と $\mathrm{C}=\left(2,5\sqrt{3}\right)$ とに対して，角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ を求める．

〔解説〕 定理3.2.2より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(8,4\sqrt{3}\right)-\left(7,2\sqrt{3}\right)=\left(1,2\sqrt{3}\right)$ ，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(2,5\sqrt{3}\right)-\left(7,2\sqrt{3}\right)=\left(-5,3\sqrt{3}\right)$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \left|\left(1,2\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{13} \ ,$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \left|\left(-5,3\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{(-5)^2+\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(1,2\sqrt{3}\right)\cdot\left(-5,3\sqrt{3}\right) = -5+18 = 13 \ .$$

よって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} = \frac{13}{\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{2} \ .$$

従って $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}$ ，$0^\circ\leq\angle\mathrm{ABC}\leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ ．　終

問題 3.2.4　座標平面の点 $\mathrm{P}=\left(\sqrt{3},6\right)$ と $\mathrm{Q}=\left(4\sqrt{3},5\right)$ と $\mathrm{R}=\left(5\sqrt{3},7\right)$ とに対して，角 PQR の劣角 $\angle\mathrm{PQR}$ を求めなさい．

例題　3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(7,8,6)$ と $\mathrm{B}=(6,9,2)$ と $\mathrm{C}=(8,4,7)$ とに対して，角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ を求める．

〔解説〕 定理3.2.2より，

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(7,8,6)-(6,9,2)=(1,-1,4)$ ，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(8,4,7)-(6,9,2)=(2,-5,5)$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = |(1,-1,4)| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \ ,$$
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = |(2,-5,5)| = \sqrt{2^2+(-5)^2+5^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (1,-1,4)\cdot(2,-5,5) = 2+5+20 = 27 \ .$$

よって

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|} = \frac{27}{3\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

従って $\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$0^\circ\leq\angle\mathrm{ABC}\leq 180^\circ$ なので $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$ ．　終

問題 3.2.5　3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(8,7,-1)$ と $\mathrm{B}=(7,4,3)$ と $\mathrm{C}=(9,-3,8)$ とに対して，角 ABC の劣角 $\angle\mathrm{ABC}$ を求めなさい．

例題　次のような実数 x を求める：座標平面における点 $\mathrm{A}=(-2,0)$ と $\mathrm{B}=\left(0,\sqrt{3}\right)$ と $\mathrm{P}=(x,0)$ とについて，角 APB の劣角は $\angle\mathrm{ABP}$ は 60° である．

〔解説〕 定理3.2.2より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|} = \cos\angle\mathrm{ABP} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-2,0)-\left(0,\sqrt{3}\right)=\left(-2,-\sqrt{3}\right)$ ，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,0)-\left(0,\sqrt{3}\right)=\left(x,-\sqrt{3}\right)$ なので，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|} = \frac{\left(-2,-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x,-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{(-2)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{x^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}} = \frac{3-2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2+3}} \ .$$

従って

$$\frac{3-2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \ ,$$
$$2(3-2x) = \sqrt{7}\sqrt{x^2+3} \ ,$$
$$4(4x^2-12x+9) = 7(x^2+3) \ ,$$
$$9x^2-48x+15=0 \ ,$$
$$3x^2-16x+5=0 \ ,$$
$$(x-5)(3x-1)=0 \ ,$$
$$x=5 \ \text{または} \ x=\frac{1}{3} \ .$$

$x=5$ のとき $\dfrac{3-2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2+3}}\neq\dfrac{1}{2}$ ．$x=\dfrac{1}{3}$ のとき $\dfrac{3-2x}{\sqrt{7}\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{1}{2}$ ．よって $x=\dfrac{1}{3}$ ．　終

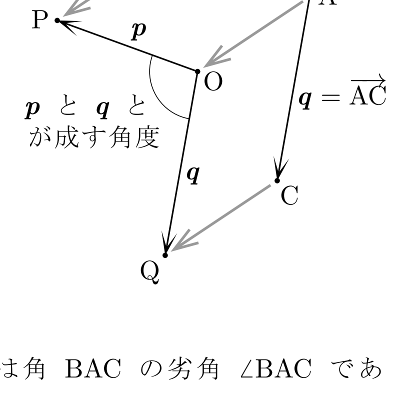
問題 3.2.6　次のような実数 y を求めなさい：座標平面における点 $\mathrm{A}=(0,3)$ と $\mathrm{B}=(1,0)$ と $\mathrm{P}=(0,y)$ とについて，角 ABP の劣角 $\angle\mathrm{APB}$ は 45° である．

―――― 定理の証明

定理 3.2.1　座標空間の点 A と B と C とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ かつ $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$ のとき，角 BAC の劣角 $\angle\mathrm{BAC}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが成す角度である．

証明　座標空間の点 A と B と C とについて，$\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ かつ $\mathrm{A}\neq\mathrm{C}$ とする．$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ かつ $\boldsymbol{q}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく．座標空間の原点を O とおく．$\boldsymbol{p}$ を位置ベクトルとする点を P とおき，$\boldsymbol{q}$ を位置ベクトルとする点を Q とおく．$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とが成す角度は角 POQ の劣角 $\angle\mathrm{POQ}$ である．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{p}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので，線分 OP と線分 AB とは平行である．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{q}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので，線分 OQ と線分 AC とは平行である．よって

$$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{POQ} \ .$$



故に，ベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とが成す角度 $\angle\mathrm{POQ}$ は角 BAC の劣角 $\angle\mathrm{BAC}$ である．つまり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とが成す角度は角 BAC の劣角 $\angle\mathrm{BAC}$ である．

（証明終り）