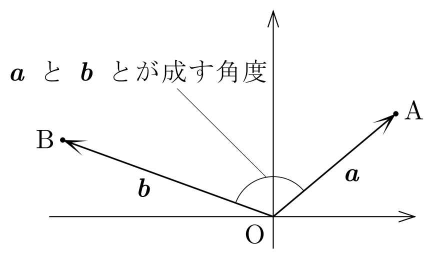
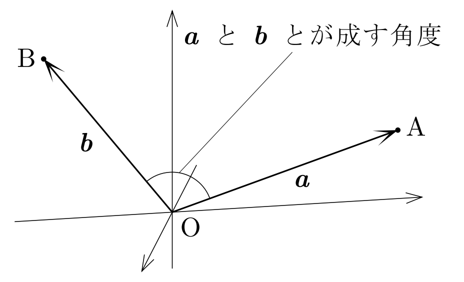
§3.1　ベクトルが成す角度

定義　ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．座標平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を O とおく． $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点を A とおき， $\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点を B とおく；このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度とは角 AOB の劣角 ∠AOB のことである．



定義　3 次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を O とおく． $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点を A とおき， $\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点を B とおく；このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度とは角 AOB の劣角 ∠AOB のことである．



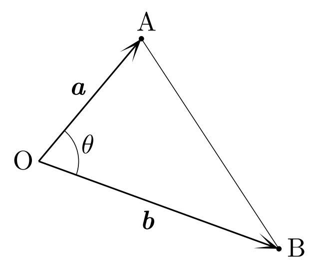
つまり，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度とは，原点 O と， $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点 A と， $\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点 B とからできる角 AOB の劣角のことです．劣角なので $0°$ 以上 $180°$ 以下です．

ベクトルの成す角度を用いて内積が次のように与えられます．

定理 3.1　実ベクトル空間の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のとき， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度を θ とおくと，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \ .$$

証明　実ベクトル空間のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ かつ $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ とする．座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，次の図のように，原点を O と，ベクトル $\boldsymbol{a}$ を位置ベクトルとする点を A と，ベクトル $\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点を B とおく． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度 θ は角 AOB の劣角 ∠AOB である． 三角形 OAB において，余弦定理より



$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{OA}}^2 + \overline{\mathrm{OB}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{OA}}\,\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \boldsymbol{a}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b}$ なので，

$$\overline{\mathrm{AB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}| \ , \quad \overline{\mathrm{OA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right| = |\boldsymbol{a}| \ , \quad \overline{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| = |\boldsymbol{b}| \ ,$$

よって

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \ .$$

この等式の左辺は定理 1.8.1 及び定理 2.8.1 より

$$|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|^2 = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} - 2\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2 - 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 \ ,$$

従って，

$$|\boldsymbol{a}|^2 - 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \ ,$$
$$-2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \ ,$$

故に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ ．　　　　（証明終り）

例　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = 3$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 5$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $150°$ であるとする． $\cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 150° = 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{15}{2}\sqrt{3} \ .$$

終

問題 3.1.1　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = 5$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 7$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $120°$ であるとします． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を計算しなさい．

例題　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = 3$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 5$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $60°$ であるとする．ベクトル $2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と $4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ との内積を計算する．

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\cdot(4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) &= 2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{a}\cdot 3\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\cdot 4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\cdot 3\boldsymbol{b} \\ &= 8\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 6\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 4\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 3\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= 8|\boldsymbol{a}|^2 + 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 3|\boldsymbol{b}|^2 \ ,\end{aligned}$$

ここで， $|\boldsymbol{a}| = 3$ ， $|\boldsymbol{b}| = 5$ ，更に

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 60° = 3\cdot 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \ ,$$

よって

$$8|\boldsymbol{a}|^2 + 2\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 3|\boldsymbol{b}|^2 = 8\cdot 3^2 + 2\cdot\frac{15}{2} - 3\cdot 5^2 = 72 + 15 - 75 = 13 \ .$$

よって $(2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})\cdot(4\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) = 13$ ．

終

問題 3.1.2　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{3}$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 4$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $30°$ であるとします．ベクトル $3\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}$ と $5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ との内積を計算しなさい．

例題　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = 4$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 3$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $120°$ であるとする．ベクトル $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ の大きさを計算する．

$$\begin{aligned}|3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}|^2 &= (3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) = 3\boldsymbol{a}\cdot 3\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{a}\cdot 2\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{b}\cdot 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}\cdot 2\boldsymbol{b} \\ &= 9\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 6\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 6\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 4\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= 9|\boldsymbol{a}|^2 + 12\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 4|\boldsymbol{b}|^2 \ ,\end{aligned}$$

ここで， $|\boldsymbol{a}| = 4$ ， $|\boldsymbol{b}| = 3$ ，更に

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 120° = 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \ ,$$

よって

$$9|\boldsymbol{a}|^2 + 12\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 4|\boldsymbol{b}|^2 = 9\cdot 4^2 + 12\cdot(-6) + 4\cdot 3^2 = 144 - 72 + 24 = 96 \ .$$

これより $|3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}|^2 = 96$ なので， $|3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| = \sqrt{96}$ ．

終

問題 3.1.3　実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{2}$ かつ $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{6}$ で， $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とが成す角度が $150°$ であるとします．ベクトル $3\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$ の大きさを計算しなさい．

例題　平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (\sqrt{3}, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (-3, \sqrt{3})$ とが成す角度 θ を求める．

$$|\boldsymbol{a}| = \left|(\sqrt{3}, 1)\right| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2 \ ,$$
$$|\boldsymbol{b}| = \left|(-3, \sqrt{3})\right| = \sqrt{(-3)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3} \ ,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1)\cdot(-3, \sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + \sqrt{3} = -2\sqrt{3} \ .$$

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ なので，

$$2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\theta = -2\sqrt{3} \ ,$$
$$\cos\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \ ,$$

$0° < \theta < 180°$ なので $\theta = 120°$ ．

終

問題 3.1.4　平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (-3, \sqrt{3})$ と $\boldsymbol{b} = (1, -\sqrt{3})$ とが成す角度 θ を求めなさい．

例題　3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$ と $\boldsymbol{b} = (1, 5, -4)$ とが成す角度 θ を求める．

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14} \ ,$$
$$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{42} \ ,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (2, 3, -1)\cdot(1, 5, -4) = 2\cdot 1 + 3\cdot 5 + (-1)\cdot(-4) = 21 \ .$$

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ なので，

$$\sqrt{14}\sqrt{42}\cos\theta = 21 \ ,$$
$$\cos\theta = \frac{21}{\sqrt{14}\sqrt{42}} = \frac{21}{\sqrt{14}\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ ,$$

$0° \leq \theta \leq 180°$ なので $\theta = 30°$ ．

終

問題 3.1.5　3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (1, 7, 2)$ と $\boldsymbol{b} = (2, 5, -5)$ とが成す角度 θ を求めなさい．