§2.7　3次元実ベクトルの内積

3次元実ベクトルについて**内積** (innner product) といわれるものを定義します.

定義　各実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ .$$

ベクトルの内積はスカラー（実数）でありベクトルではありません． ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積（を表す式） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との間の点 "$\cdot$" は省略してはいけません.

$\boxed{\text{例題}}$　3次元実ベクトルの内積

$$(5,6)\cdot(8,-7)\,,\qquad (5,-3)\cdot\left(2,\frac{10}{3}\right)\,,\qquad \left(-2,\sqrt{3}\right)\cdot\left(5,2\sqrt{3}\right)$$

を計算する.

$$(5,6)\cdot(8,-7)=5\cdot8+6\cdot(-7)=40-42=-2\ .$$
$$(5,-3)\cdot\left(2,\frac{10}{3}\right)=5\cdot2+(-3)\cdot\frac{10}{3}=10-10=0\ .$$
$$\left(-2,\sqrt{3}\right)\cdot\left(5,2\sqrt{3}\right)=-2\cdot5+\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}=-10+6=-4\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.7.1}}$　3次元実ベクトルの以下の内積を計算しなさい.

(1)　$(7,8)\cdot(9,-6)$.　　(2)　$\left(\frac{7}{6},\frac{9}{2}\right)\cdot(3,5)$.　　(3)　$\left(\sqrt{5},4\right)\cdot\left(2\sqrt{5},-3\right)$.

$\boxed{\text{問題 2.7.2}}$　次のような実数 x を求めなさい：3次元実ベクトル $(x,2)$ と $(3,5)$ との内積は 0 である.

3次元実ベクトルの内積に関する定理をいくつか述べます.

定理 2.7.1　任意の3次元実ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ および任意のスカラー p について，以下のことが成り立つ：

(内積の交換法則)　$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}\ ;$$

(内積の結合法則)　$$(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,,\qquad \boldsymbol{a}\cdot(p\boldsymbol{b})=p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\ ;$$

(内積の分配法則)　$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\,,\qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\ ;$$

$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=0\,,\qquad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0\ .$$

証明　実数 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3$ に対して $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ ,$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=(b_1,b_2,b_3)\cdot(a_1,a_2,a_3)=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\ ,$$

よって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

$$\begin{aligned}(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}&=\{p(a_1,a_2,a_3)\}\cdot(b_1,b_2,b_3)=(pa_1,pa_2,pa_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)\\&=pa_1b_1+pa_2b_2+pa_2b_3\ ,\end{aligned}$$

$$p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=p\{(a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2)\}=p(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)=pa_1b_1+pa_2b_2+pa_3b_3\ ,$$

よって $(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. 同様に $\boldsymbol{a}\cdot(p\boldsymbol{b})=p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=(a_1,a_2,a_3)\cdot\{(b_1,b_2,b_3)+(c_1,c_2,c_3)\}\\&=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1+c_1,b_2+c_2,b_3+c_3)\\&=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)+(a_1,a_2,a_3)\cdot(c_1,c_2,c_3)\\&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3\\&=a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2+a_3b_3+a_3c_3\ ,\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. 同様に $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a}=(0,0,0)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0\cdot a_1+0\cdot a_2+0\cdot a_3=0\ .$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(0,0,0)=a_1\cdot0+a_2\cdot0+a_3\cdot0=0\ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=7$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=8$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$ とする． ベクトル $4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ と $5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})&=4\boldsymbol{a}\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})-3\boldsymbol{b}\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})\\&=4\boldsymbol{a}\cdot5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{a}\cdot6\boldsymbol{b}-(3\boldsymbol{b}\cdot5\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\cdot6\boldsymbol{b})\\&=20\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+24\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-18\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=20\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+9\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-18\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\ ,\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=7$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=8$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$ なので,

$$20\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+9\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-18\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=20\cdot7+9\cdot(-2)-18\cdot8=140-18-144=-22\ .$$

よって $(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})=-22$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.7.3}}$　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=7$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=8$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$ とします． ベクトル $3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ と $6\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ との内積を計算しなさい.

任意の実数 a について $a^2\geq0$ でした． これと似たことがベクトルについても成り立ちます.

定理 2.7.3　任意の3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\geq0$.

証明　実数 a_1,a_2,a_3 に対して $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_1,a_2,a_3)=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\ .$$

a_1,a_2,a_3 は実数なので ${a_1}^2\geq0$ かつ ${a_2}^2\geq0$ かつ ${a_3}^2\geq0$, よって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\geq0$.　（証明終り）

任意の実数 a について次のことが成り立ちました：

$$a^2=0\iff a=0$$

これと似たことがベクトルの内積についても成り立ちます.

定理 2.7.4　任意の3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ について

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0\iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ .$$

証明　実数 a_1,a_2,a_3 に対して $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(a_1,a_2,a_3)=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3={a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2\ .$$

a_1,a_2,a_3 は実数なので ${a_1}^2\geq0$, ${a_2}^2\geq0$, ${a_3}^2\geq0$. 従って

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=0&\iff {a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2=0\iff {a_1}^2=0\text{ かつ }{a_2}^2=0\text{ かつ }{a_3}^2=0\\&\iff a_1=0\text{ かつ }a_2=0\text{ かつ }a_3=0\\&\iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ .\end{aligned}$$

（証明終り）