§2.6　3次元座標空間における平行移動とベクトル

xyz 座標空間において，例えば点 (x,y,z) を x 軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ z 軸の向きに 4 だけ移動させた点は $(x+2,y+3,z+4)$ です．一般的に，xy 座標平面において，点 (x,y,z) を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ移動させた点は $(x+p,y+q,z+r)$ です． xyz 座標空間において，点集合 F の各点 (x,y,z) を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ移動させた点 $(x+p,y+q,z+r)$ の全体を，F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させた点集合といいます．つまり，点集合 F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させた点集合とは

$$\{\,(x+p,y+q,z+r)\mid(x,y,z)\in F\,\}$$

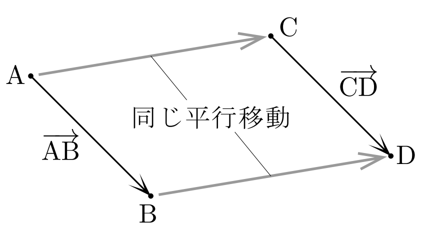
のことです．座標平面において図形を平行移動させると，位置が変わるだけで，形も大きさも向きも変わりません．

xyz 座標空間において，図形 F の平行移動させた図形 F' とは，ある定数 p と q と r とがあって，F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させた図形です：

$$F'=\{\,(x+p,y+q,z+r)\mid(x,y,z)\in F\,\}\ .$$

次の定理の証明は後回しにします．

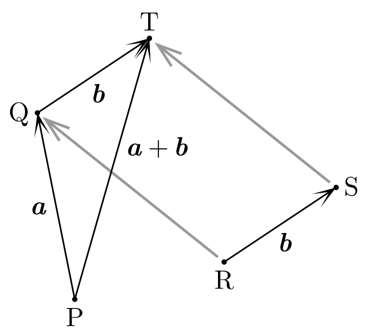
定理 2.6.1　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B, C, D について以下のことが成り立つ.
(1)　ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移るならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ならば，ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移る.



この定理より，平行移動によって始点どうし終点どうし重ねることができる有向線分は同じベクトルを表します.

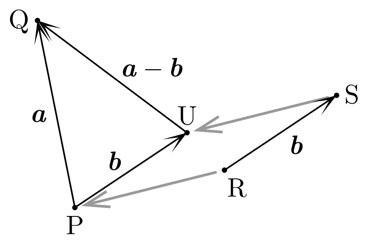
3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を考えます．右図のように，点 R が点 Q に移る平行移動によって，点 S が点 T に移るとします．このとき，定理 2.6.1 より $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{QT}}$ なので，定理 2.5.4 より

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QT}}=\overrightarrow{\mathrm{PT}}\ .$$



また，右図のように，点 R が点 P に移る平行移動によって，点 S が点 U に移るとします．このとき，定理 2.6.1 より $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{PU}}$ なので，定理 2.5.4 より

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PU}}=\overrightarrow{\mathrm{UT}}\ .$$



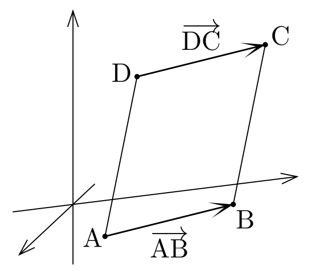
定理 2.6.1 より次の定理が導かれます.

定理 2.6.2　3次元座標空間の点 A, B, C, D について，A, B, C, D がある直線に属さないとき，

$$\text{A, B, C, D がある平面に属し四角形 ABCD 平行四辺形である}\iff\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}\ .$$

証明　点 A, B, C, D がある平面に属し四角形 ABCD 平行四辺形であると仮定する．この仮定より，ある平行移動で，点 A が点 D に，点 B が点 C に移る．定理 2.6.1 より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と仮定する．定理 2.6.1 より，ある平行移動で，点 A は点 D に移り，点 A は点 D に移る．従って，点 A, B, C, D がある平面に属し四角形 ABCD 平行四辺形である.



（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　3次元座標空間の点 A, B, C, D について，四角形 ABCD は平行四辺形で，$\mathrm{A}=(1,3,2)$ ，$\mathrm{B}=(5,6,4)$ ，$\mathrm{C}=(8,9,7)$ とする．点 D を求める.

四角形 ABCD が平行四辺形である条件は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ．点 D の位置ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,6,4)-(1,3,2)=(4,3,2)\ ,\qquad\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(8,9,7)-\boldsymbol{d}\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ より $(4,3,2)=(8,9,7)-\boldsymbol{d}$ なので，$\boldsymbol{d}=(8,9,7)-(4,3,2)=(4,6,5)$.
従って $\mathrm{D}=(4,6,5)$.　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.6}}$　3次元座標空間の点 A, B, C, D について，四角形 ABCD は平行四辺形で，$\mathrm{A}=(1,2,3)$ ，$\mathrm{C}=(5,4,6)$ ，$\mathrm{D}=(8,9,7)$ とします．点 B を求めなさい.

―――― 定理の証明

定理 2.6.1　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B, C, D について以下のことが成り立つ.
(1)　ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移るならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ならば，ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移る.

証明　xy 座標平面の点 A, B, C, D を考える.

実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 に対して $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ，$\mathrm{B}=(b_1,b_2,b_3)$ とおく．ある定数 p と q と r とに対して，x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させると，点 A が点 C に，点 B が点 D に移ると仮定する. $\mathrm{C}=(a_1+p,a_2+q,a_3+r)$ ，$\mathrm{D}=(b_1+p,b_2+q,b_3+r)$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_2-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(b_1+p,b_2+q,b_3+r)-(a_1+p,a_2+q,a_3+r)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)\ .$$

故に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.

逆に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と仮定する．実数 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3$ に対して $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ，$\mathrm{B}=(b_1,b_2,b_3)$ ，$\mathrm{C}=(c_1,c_2,c_3)$ ，$\mathrm{D}=(d_1,d_2,d_3)$ とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)\ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(d_1,d_2,d_3)-(c_1,c_2,c_3)=(d_1-c_1,d_2-c_2,d_3-c_3)\ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より,

$$(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)=(d_1-c_1,d_2-c_2,d_3-c_3)\ ,$$
$$b_1-a_1=d_1-c_1\ \text{かつ}\ b_2-a_2=d_2-c_2\ \text{かつ}\ b_3-a_3=d_3-c_3\ ,$$
$$c_1-a_1=d_1-b_1\ \text{かつ}\ c_2-a_2=d_2-b_2\ \text{かつ}\ c_3-a_3=d_3-b_3\ ,$$

p,q,r を次のようにおく：

$$p=c_1-a_1=d_1-b_1\ ,\qquad q=c_2-a_2=d_2-b_2\ ,\qquad r=c_3-a_3=d_3-b_3\ .$$

$c_1=a_1+p$ かつ $c_2=a_2+q$ かつ $c_3=a_3+r$ なので，点 $\mathrm{C}=(c_1,c_2,c_3)$ は点 $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$ を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させた点である． $d_1=b_1+p$ かつ $d_2=b_2+q$ かつ $d_3=b_3+r$ なので，点 $\mathrm{D}=(d_1,d_2,d_3)$ は点 $\mathrm{B}=(b_1,b_2,b_3)$ を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ z 軸の向きに r だけ平行移動させた点である.　（証明終り）