§2.5　3次元座標空間の点とベクトル

実数の3項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は，$\mathbf{R}^3$ の要素どうしの加法および実数と $\mathbf{R}^3$ の要素との乗法を付け加えることによって3次元実ベクトル空間になりました．実数 a と b と c との3項組 (a,b,c) は，3次元座標空間の点と考えることも3次元実ベクトルと考えることもできます．3次元座標空間の点 P の座標 (a,b,c) を3次元実ベクトルと考えるとき，P の**位置ベクトル**といいます．

定義　各実数 a,b,c について，3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 $\mathrm{P}=(a,b,c)$ に対して3次元実ベクトル (a,b,c) を点 P の位置ベクトルという．

この定義より，実数 a_1,a_2,a_3 に対して，3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおくと， $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ です．

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の任意の点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり，任意のベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して $\boldsymbol{p}$ を位置ベクトルとする点が唯一つ定まります．つまり3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点と3次元実ベクトルとは過不足なく一対一に対応します．

定理 2.5.1　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおくと，

$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\ .$$

証明　実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 について， $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\mathrm{B}=(b_1,b_2,b_3)$ とおくと， $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ ， $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ なので，

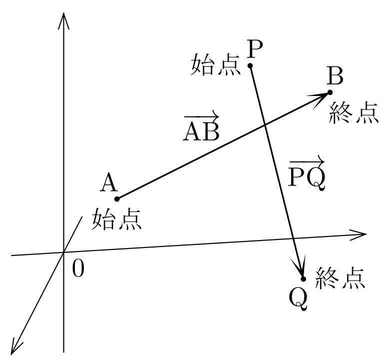
$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \iff (a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3) \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\ .$$

（証明終り）

定義　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とおく．点 A, B に対して，3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を次のように定義する：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\ .$$

この定義により，3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B に対して3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を考えることができます．このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を，右図のように，線分 AB に点 A から点 B への“向き”を付けて表現します．このような向き付けられた線分をを有向線分といいます．点 A から点 B への有向線分において，点 A を始点といい，点 B を終点といいます．



$\boxed{\text{例題}}$　3次元座標空間の点 $\mathrm{A}=(8,-1,-2)$ と $\mathrm{B}=(5,7,-6)$ とに対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求める．

点 A の位置ベクトルは $(3,7)$ で点 B の位置ベクトルは $(5,4)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,7,-6)-(8,-1,-2)=\bigl(5-8,7-(-1),-6-(-2)\bigr)=(-3,8,-4)\ .\quad \boxed{終}$$

$\boxed{\text{問題 2.5}}$　3次元座標空間の点 $\mathrm{P}=(7,3,-2)$ と $\mathrm{Q}=(9,-5,4)$ とに対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めなさい．

定理 2.5.2　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を O とおくとき，この座標平面の任意の点 A に対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は A の位置ベクトルである．

証明　点 O は原点なので $\mathrm{O}=(0,0,0)$ ，従って点 O の位置ベクトルは $(0,0,0)$ つまり零ベクトル $\mathbf{0}$ である．点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}-\mathbf{0}=\boldsymbol{a}\ .$$

従ってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は点 A の位置ベクトルである．（証明終り）

定理 2.5.3　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の任意の点 A について $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\mathbf{0}$ ．3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の任意の点 A, B について， $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ ならば $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ ．

証明　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく． $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ ． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ ならば， $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ，よって定理 2.5.1 より $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ ．（証明終り）

定理 2.5.4　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の任意の点 A, B, C について，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ ,\qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ .$$

証明　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B, C の各々の位置ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ とおく． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ なので，

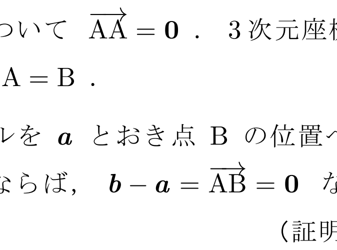
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ .$$

更にこの等式より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．（証明終り）

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ との和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を図示します．定理 2.5.4 より，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\ .$$

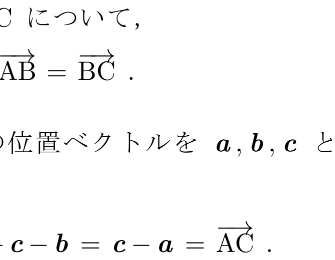
例えば右図のようになります．



また，3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ との差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を図示します．定理 2.5.4 より，

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\ .$$

例えば右図のようになります．



定理 2.5.5　3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の任意の点 A と B とについて $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．

証明　定理 2.5.4 と定理 2.5.3 より $\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\mathbf{0}$ ．従って $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\mathbf{0}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．

（証明終り）