§2.4　3次元実ベクトルの演算

3次元実ベクトルの演算について次の定理が成り立ちます.

定理　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 及び任意の実数 p, q について，以下のことが成り立つ：

(加法の交換法則)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(加法の結合法則)　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a} \ ;$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \ ;$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a} \ ;$$

(スカラー倍の結合法則)　$p(q\boldsymbol{a})=(pq)\boldsymbol{a}$;

(スカラー倍の分配法則)　$p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$,　$(p+q)\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{a}$.

これらのうちのいくつかを証明します.

各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ とに対して,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \ ,$$

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=(b_1, b_2, b_3)+(a_1, a_2, a_3)=(b_1+a_1, b_2+a_2, b_3+a_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2) \ ,$$

よって $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

各実数 a_1, a_2, a_3 について,，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ に対して，$-\boldsymbol{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)$ なので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})&=(a_1, a_2, a_3)+(-a_1, -a_2, -a_3)\\&=\big(a_1+(-a_1), a_2+(-a_2), a_3+(-a_3)\big)=(0,0,0)\\&=\boldsymbol{0} \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}&=(-a_1, -a_2, -a_3)+(a_1, a_2, a_3)\\&=(-a_1+a_1, -a_2+a_3, -a_2+a_3)=(0,0,0)\\&=\boldsymbol{0} \ .\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$ ，$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について，3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ と任意の実数 p とに対して,

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=p\{(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)\}=p(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)\\&=\big(p(a_1+b_1), p(a_2+b_2), p(a_3+b_3)\big)\\&=(pa_1+pb_1, pa_2+pb_2, pa_3+pb_3) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}&=p(a_1, a_2, a_3)+p(b_1, b_2, b_3)=(pa_1, pa_2, pa_3)+(pb_1, pb_2, pb_3)\\&=(pa_1+pb_1, pa_2+pb_2, pa_3+pb_3) \ ,\end{aligned}$$

よって $p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$.

3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ などに実数（スカラー）p, q, r などを掛けて足し合わせた形の式

$$p\boldsymbol{a} \ , \qquad p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b} \ , \qquad p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$$

などはやはり3次元実ベクトルを表します. $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$ の形の式をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合といいます. $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$ の形の式をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合といいます. 線形結合は1次結合ということもあります.

例題　3次元実ベクトル空間において，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対してベクトル $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{q}=4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ とを考える. ベクトル $6\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$ と $5\boldsymbol{p}-6\boldsymbol{q}$ とを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表す.

$$\begin{aligned}6\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}&=6(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+5(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=12\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+20\boldsymbol{a}-15\boldsymbol{b}\\&=32\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b} \ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5\boldsymbol{p}-6\boldsymbol{q}&=5(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-6(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=10\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-24\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}\\&=23\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{a} \ .\end{aligned}$$

終

問題 1.4.1　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対してベクトル $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ とを考えます. ベクトル $5\boldsymbol{p}+6\boldsymbol{q}$ と $6\boldsymbol{p}-5\boldsymbol{q}$ とを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表しなさい.

例題　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,5,1)$ と $\boldsymbol{b}=(-3,-6,-1)$ と $\boldsymbol{c}=(2,6,4)$ とに対して，3次元実ベクトル $\boldsymbol{p}=(-4,8,2)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合で表す.

〔解説〕 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合は，ある実数 x と y と z とに対するベクトル $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ のことである. $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$ となる実数 x と y と z とを求める.

〔解答〕 実数を表す変数 x, y, z に対して,

$$\begin{aligned}x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}&=x(3,5,1)+y(-3,-6,-1)+z(2,6,4)\\&=(3x-3y+2z, 5x-6y+6z, x-y+4z) \ .\end{aligned}$$

$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\boldsymbol{p}$ とすると,

$$(3x-3y+2z, 5x-6y+6z, x-y+4z) = (-4,-8,2) \ ,$$

よって

$$3x-3y+2z = -4 \ \text{かつ} \ 5x-6y+6z = -8 \ \text{かつ} \ x-y+4z = 2 \ .$$

第1式を3倍した式 $9x-9y+6z=-12$ と第2式とより $4x-3y=-4$. 第1式を2倍した式 $6x-6y+4z=8$ と第3式とより $x-y=-2$. このように連立方程式を解くと，$x=2$ かつ $y=4$ かつ $z=1$. 故に $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

終

問題 1.4.2　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}=(3,6,1)$ と $\boldsymbol{b}=(-2,-3,8)$ と $\boldsymbol{c}=(4,5,-2)$ とに対して，3次元実ベクトル $\boldsymbol{p}=(7,-4,5)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合で表しなさい.