§2.3　3次元実ベクトル

実数の3項組の全体

$$\mathbf{R}^3 = \{\,(x,y,z) \mid x,y,z \text{ は実数}\,\}$$

において以下のような演算を考えます． 各実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 について， $\mathbf{R}^3$ の要素 (a_1,a_2,a_3) と (b_1,b_2,b_3) との和を次のように定義します：

$$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)\ .$$

この和をベクトル和といいます． 更に，各実数 a_1,a_2,a_3,p について，実数 p と $\mathbf{R}^3$ の要素 (a_1,a_2,a_3) との積を次のように定義します：

$$p(a_1,a_2,a_3) = (pa_1,pa_2,pa_3)\ .$$

この積をスカラー倍といいます．

実数 x と y と z との3項組 (x,y,z) にベクトル和及びスカラー倍の演算を行うとき，実数の3項組を**3次元実ベクトル**[1] (3-dimensional real vector) あるいは**空間ベクトル**あるいは略して**ベクトル**といいます． 3次元実ベクトルに対して実数のことを**スカラー**といいます． 3次元実ベクトル (x,y,z) を構成する実数 x と y と z とをベクトル (x,y,z) の**成分**といいます．

例　3次元実ベクトル $(-2,-3,4)$ と $(-5,7,-9)$ とのベクトル和は

$$(-2,-3,4)+(-5,7,-9) = \bigl(-2+(-5),-3+7,4+(-9)\bigr) = (-7,4,-5)\ .$$

3次元実ベクトル $(5,-7,9)$ の $\frac{3}{4}$ 倍は

$$\frac{3}{4}(5,-7,9) = \left(\frac{3}{2}\cdot 5,\frac{3}{2}\cdot(-7),\frac{3}{2}\cdot 9\right) = \left(\frac{15}{4},-\frac{21}{4},\frac{27}{4}\right)\ .$$

終

実数 x と y と z との3項組 (x,y,z) を3次元座標空間の点（の座標）と考えるとき，2.1節で述べたように，実数の3項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は座標平面です． 実数 x と y と z との3項組 (x,y,z) を3次元座標空間の点（の座標）と考えるとき，実数の3項組の全体 $\mathbf{R}^3$ を3次元実ベクトル空間といいます． ですから，実数 x と y と z との3項組 (x,y,z) は，3次元座標空間の点と考えることも3次元実ベクトルと考えることもできます． 3次元座標空間の点と考えると和とか積とかの演算はできません． しかし，3次元実ベクトルと考えるとベクトル和およびスカラー倍の演算ができます．

以後，3次元実ベクトルを太文字で表します．

3次元実ベクトル $(0,0,0)$ を**零ベクトル**といい， $\mathbf{0}$ と書き表します[2]：

$$\mathbf{0} = (0,0,0)\ .$$

定理 2.3.1　零ベクトル $\mathbf{0}$ 及び任意の3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ について　$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ．

証明　実数 a_1,a_2,a_3 に対して　$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$　とおくと，

$$0\boldsymbol{a} = 0\cdot(a_1,a_2,a_3) = (0\cdot a_1,0\cdot a_2,0\cdot a_3) = (0,0,0) = \mathbf{0}\ .$$

（証明終り）

定理 2.3.2　零ベクトル $\mathbf{0}$ および任意の実数 p について　$p\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ．

証明　$\mathbf{0} = (0,0,0)$　なので，

$$p\mathbf{0} = p\cdot(0,0,0) = (p\cdot 0,p\cdot 0,p\cdot 0) = (0,0,0) = \mathbf{0}\ .$$

（証明終り）

3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，実数 -1 とベクトル $\boldsymbol{a}$ とのスカラー積 $-1\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{a}$ と略記します： $-\boldsymbol{a} = -1\cdot\boldsymbol{a}$ ． 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，ベクトル $-\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルといいます．

定理 2.3.3　各実数 a_1,a_2,a_3 について，3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$　に対して $-\boldsymbol{a} = (-a_1,-a_2,-a_3)$ ．

証明

$$-\boldsymbol{a} = -1\cdot(a_1,a_2,a_3) = (-1a_1,-1a_2,-1a_3) = (-a_1,-a_2,-a_3)\ .$$

（証明終り）

3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対し， $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ と書き表します： $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ．

定理 2.3.4　各実数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 について，3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$　と　$\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$　とに対して　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$ ．

証明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) = (a_1,a_2,a_3)+\bigl(-(b_1,b_2,b_3)\bigr)\\ &= (a_1,a_2,a_3)+(-b_1,-b_2,-b_3) = \bigl(a_1+(-b_1),a_2+(-b_2),a_3+(-b_3)\bigr)\\ &= (a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

例　3次元実ベクトル $(7,4,6)$ から3次元実ベクトル $(2,-5,8)$ を引くと

$$(7,4,6)-(2,-5,8) = \bigl(7-2,4-(-5),6-8\bigr) = (5,9,-2)\ .$$

終

例題　3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (9,-6,4)$　と　$\boldsymbol{b} = (7,2,-5)$　とに対してベクトル $3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ を計算する．

$$\begin{aligned}3(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) &= 3\{(9,-6,4)-(7,2,-5)\} = 3\bigl(9-7,-6-2,4-(-5)\bigr)\\ &= 3(2,-8,9) = \bigl(3\cdot 2,3\cdot(-8),3\cdot 9\bigr)\\ &= (6,-24,27)\ .\end{aligned}$$

終

例題　3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (4,9,-8)$　と　$\boldsymbol{b} = (5,-7,6)$　とに対してベクトル $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ を計算する．

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b} &= 3(4,9,-8)+2(5,-7,6) = \bigl(3\cdot 4,3\cdot 9,3\cdot(-8)\bigr)+\bigl(2\cdot 5,2\cdot(-7),2\cdot 6\bigr)\\ &= (12,27,-24)+(10,-14,12) = \bigl(12+10,27+(-14),-24+12\bigr)\\ &= (22,13,-12)\ .\end{aligned}$$

終

問題 2.3.1　3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (3,-9,8)$　と　$\boldsymbol{b} = (4,6,-2)$　とに対してベクトル $5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を計算しなさい．

問題 2.3.2　3次元実ベクトル　$\boldsymbol{a} = (9,-2,4)$　と　$\boldsymbol{b} = (8,7,-6)$　とに対してベクトル $5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ を計算しなさい．

例題　次のような実数 x と y と z とを求める：

$$x(3,-6,1)-(-1,6,5) = y(-6,4,2)+z(-8,1,3)\ .$$

この等式の左辺は

$$x(3,-6,1)-y(-6,4,2)-z(-8,1,3) = (3x+6y+8z,-6x-4y-z,x-2y-3z)\ .$$

$x(3,-6,1)-y(-6,4,2)-z(-8,1,3) = (-1,6,5)$　より，

$$(3x+6y+8z,-6x-4y-z,x-2y-3z) = (-1,6,5)\ ,$$

$$3x+6y+8z = -1 \text{　かつ　} -6x-4y-z = 6 \text{　かつ　} x-2y-3z = 5\quad .$$

この連立方程式を解くと　$x = 3$　かつ　$y = -7$　かつ　$z = 4$ ．

終

問題 2.3.3　次のような実数 x と y と z とを求める：

$$x(-3,1,4)-y(-6,3,2)-z(8,-6,1) = (7,-3,3)\ .$$

例題　3次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式　$8\boldsymbol{x}+(-2,7,5) = 3\boldsymbol{x}+(6,4,9)$　を解く．

$8\boldsymbol{x}+(-2,7,5) = 3\boldsymbol{x}+(6,4,9)$　より，

$$8\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{x} = (6,4,9)-(-2,7,5)\ ,$$

$$5\boldsymbol{x} = (8,-3,4)\ ,$$

故に　$\boldsymbol{x} = \frac{1}{5}(8,-3,4) = \left(\frac{8}{5},-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ ．

終

問題 2.3.4　3次元実ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式　$4\boldsymbol{x}-(2,9,-8) = -3\boldsymbol{x}+(6,-7,5)$　を解きなさい．

---

[1] 実ベクトルとは成分が実数であるベクトルのことです．

[2] 平面ベクトルの零ベクトル $(0,0)$ と3次元実ベクトルの零ベクトル $(0,0,0)$ とは別物なので，本来は，例えば　${}_2\mathbf{0} = (0,0)$　と　${}_3\mathbf{0} = (0,0,0)$　とかのように，異なる記号を使うべきです． しかし，平面ベクトルか3次元実ベクトルかは大抵は文脈で分かるので，どちらの零ベクトルも $\mathbf{0}$ で表します．