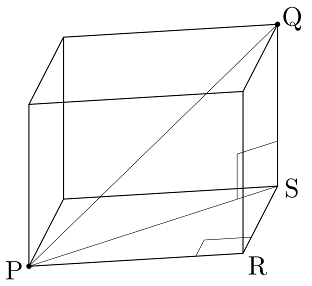
§2.2　3次元座標空間における2点間の距離



3次元空間において，点 P, Q, R, S が右図のように直方体の頂点であるとします． 角 PRS は直角なので三角形 PRS は直角三角形です． ピタゴラスの定理より，

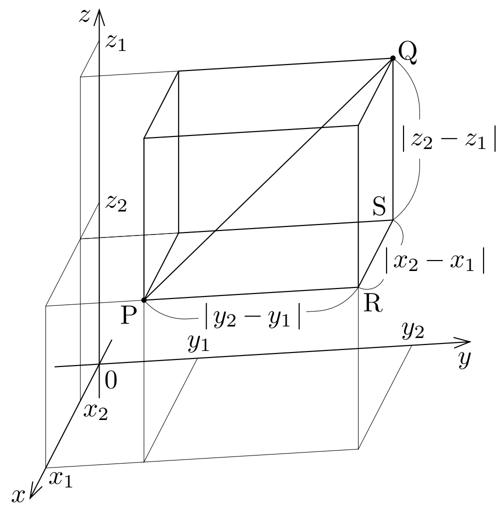
$$\overline{\mathrm{PS}}^2 = \overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{RS}}^2 \ .$$

角 PSQ は直角なので三角形 PSQ は直角三角形です． ピタゴラスの定理より，

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{PS}}^2 + \overline{\mathrm{SQ}}^2 \ .$$

これらより

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{RS}}^2 + \overline{\mathrm{SQ}}^2 \ .$$



3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において，実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して点 $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1)$ と点 $\mathrm{Q} = (x_2, y_2, z_2)$ とを結ぶ線分 PQ を考えます． 点 $\mathrm{R} = (x_1, y_2, z_1)$ と点 $\mathrm{S} = (x_2, y_2, z_1)$ とを考えます．

$$\overline{\mathrm{PR}} = |y_2 - y_1| \ ,$$
$$\overline{\mathrm{RS}} = |x_2 - x_1| \ ,$$
$$\overline{\mathrm{SQ}} = |z_2 - z_1| \ .$$

線分 PR, RS, SQ を辺とする直方体を考えると，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}}^2 &= \overline{\mathrm{PR}}^2 + \overline{\mathrm{RS}}^2 + \overline{\mathrm{SQ}}^2 = |y_2 - y_1|^2 + |x_2 - x_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \ .\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{PQ}} \geq 0$ なので

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

このようにして次の定理が導かれます．

定理 2.2　3次元座標空間において，実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して点 $\mathrm{P} = (x_1, y_1, z_1)$ と点 $\mathrm{Q} = (x_2, y_2, z_2)$ との間の距離は

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　実数を表す変数 x, y, z に関する次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めなさい：3次元座標空間において点 (x, y, z) が点 $(-9, 4, -1)$ と点 $(-6, 8, -2)$ とから等距離にある．

点 (x, y, z) が点 $(-9, 4, -1)$ と点 $(-6, 8, -2)$ と等距離にある条件は，

$$\sqrt{(x+9)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-8)^2 + (z+2)^2} \ ,$$
$$(x+9)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = (x+6)^2 + (y-8)^2 + (z+2)^2 \ ,$$
$$x^2 + 18x + 81 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 2z + 1 = x^2 + 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 + z^2 + 4z + 4 \ ,$$
$$6x + 8y - 2z = 6 \ ,$$

つまり $3x + 4y - z = 3$ ．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.2.1}}$　実数を表す変数 x, y, z に関する次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めなさい：3次元座標空間において点 (x, y, z) が点 $(2, 5, 8)$ と点 $(7, 6, 4)$ とから等距離にある．

$\boxed{\text{例題}}$　3次元座標空間において点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点を求める．

点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点を (x, y, z) とおく． 点 (x, y, z) が点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ とから等距離にある条件は，

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 \ ,$$

整理すると $3x + 3y - 2z = 25$ ． 点 (x, y, z) が点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ とから等距離にある条件は，

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = (x-9)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 \ ,$$

整理すると $7x - 5y + 4z = 5$ ． 点 (x, y, z) が点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある条件は，

$$(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-8)^2 + (y-5)^2 + (z+5)^2 \ ,$$

整理すると $x - 4y + 3z = -14$ ． これらの方程式より，$x = 4$ かつ $y = 3$ かつ $z = -2$ ． よって，点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点は $(4, 3, -2)$ である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 2.2.2}}$　3次元座標空間において点 $(-2, 1, 8)$ と点 $(-4, 4, 7)$ と点 $(-8, 2, -1)$ と点 $(-7, 5, 3)$ とから等距離にある点を求めなさい．