§1.8　平面ベクトルの大きさ

任意の実数 a に対して，a の絶対値 $|a|$ は

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

でした．このことと同様に，平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ を定義します．ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ について，定理1.7.3より $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0$ ですから，実数 $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ があります.

定義　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，実数 $\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$ を $\boldsymbol{a}$ の大きさといい，$|\boldsymbol{a}|$ と書き表す：

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} \ .$$

定理 1.8.1　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ について

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \ .$$

証明　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0$ なので $|\boldsymbol{a}|^2 = \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ ．　（証明終り）

定理 1.8.2　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ について，

$$|\boldsymbol{a}| = 0 \iff \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \ .$$

証明　定理1.7.4を用いる．

$$|\boldsymbol{a}| = 0 \iff \sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = 0 \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \iff \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \ .$$

（証明終り）

定理 1.8.3　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び任意の実数 k について，

$$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}| \ .$$

証明

$$|k\boldsymbol{a}| = \sqrt{(k\boldsymbol{a})\cdot(k\boldsymbol{a})} = \sqrt{k^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = \sqrt{k^2}\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}} = |k||\boldsymbol{a}| \ .$$

（証明終り）

つまり，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び任意の実数 k について，ベクトル $k\boldsymbol{a}$ の大きさはベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさの $|k|$ 倍です.

定理 1.8.4　任意の実数 a_1, a_2 に対して，平面ベクトル (a_1, a_2) の大きさ $|(a_1, a_2)|$ は

$$|(a_1, a_2)| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \ .$$

証明

$$|(a_1, a_2)| = \sqrt{(a_1, a_2)\cdot(a_1, a_2)} = \sqrt{a_1a_1 + a_2a_2} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \ .$$

（証明終り）

$\boxed{例}$　平面ベクトル $(-3, 5)$ の大きさは

$$|(-3, 5)| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.8.1}$　以下の平面ベクトルの大きさを求めなさい.

(1) $(5, -2)$.　　(2) $\left(3 - \sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}\right)$.

各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ と $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ とを結ぶ線分の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ は

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

でした.

定理 1.8.5　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A, B について，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \overline{\mathrm{AB}} \ .$$

証明　実数 a_1, a_2, b_1, b_2 に対して $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ ，$\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ とおく．更に，点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と，点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ ，$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \ .$$

よって定理1.8.4より

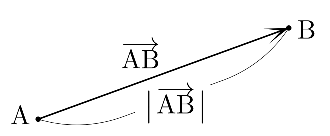
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \ .$$

また，$\mathrm{A} = (a_1, a_2)$ ，$\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ より，

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \ .$$

故に $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \overline{\mathrm{AB}}$ ．　（証明終り）

つまり，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A, B について，例えば右図のように，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|$ は線分 AB の長さです.



ベクトルの内積に関する計算をしてみます.

$\boxed{例題}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，$|\boldsymbol{a}| = 2$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 3$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -4$ とする．ベクトル $8\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$ と $7\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(8\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}) &= 8\boldsymbol{a}\cdot(7\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}) - 5\boldsymbol{b}\cdot(7\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}) \\ &= 8\boldsymbol{a}\cdot 7\boldsymbol{a} + 8\boldsymbol{a}\cdot 6\boldsymbol{b} - (5\boldsymbol{b}\cdot 7\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}\cdot 6\boldsymbol{b}) \\ &= 56\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 48\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 35\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} - 30\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= 56|\boldsymbol{a}|^2 + 13\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 30|\boldsymbol{b}|^2 = 56\cdot 4 - 13\cdot(-4) - 30\cdot 9 \\ &= 6 \ .\end{aligned}$$

よって $(8\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}) = 6$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.8.2}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，$|\boldsymbol{a}| = 3$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 2$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -4$ とします．ベクトル $5\boldsymbol{a} + 6\boldsymbol{b}$ と $8\boldsymbol{a} - 7\boldsymbol{b}$ との内積を計算しなさい.

$\boxed{例題}$　3次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，$|\boldsymbol{a}| = 4$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 5$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -18$ とする．ベクトル $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ の大きさ $|2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}|$ を求める.

$$\begin{aligned}|2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}|^2 &= (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) = 4\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 6\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 6\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} + 9\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \\ &= 4|\boldsymbol{a}|^2 + 12\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 9|\boldsymbol{b}|^2 = 4\cdot 16 + 12\cdot(-18) + 9\cdot 25 \\ &= 73 \ .\end{aligned}$$

よって $|3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}| = \sqrt{73}$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.8.3}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，$|\boldsymbol{a}| = 5$ かつ $|\boldsymbol{b}| = 6$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 26$ とします．ベクトル $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ の大きさ $|3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}|$ を求めなさい.

定義　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ が単位ベクトルであるとは $|\boldsymbol{a}| = 1$ となることである.

$\boxed{例題}$　次のような実数 x を求める：平面ベクトル $\left(x, \dfrac{2}{3}\right)$ が単位ベクトルである.

$\left|\left(x, \dfrac{2}{3}\right)\right| = 1$ なので，$\sqrt{x^2 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = 1$ ，$x^2 + \dfrac{4}{9} = 1$ ，$x^2 = \dfrac{5}{9}$ ，$x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{9}} = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.8.4}$　次のような実数 y を求めなさい：平面ベクトル $\left(-\dfrac{3}{4}, y\right)$ が単位ベクトルである.

ベクトルの内積について更にもう一つ定理を述べます.

定理 1.8.6　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて，

$$-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \ .$$

証明　$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ ，$|\boldsymbol{a}| = 0$ なので $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| = 0$ ，よって $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ．

$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ とする．$|\boldsymbol{a}| \neq 0$ ．

$$\begin{aligned}\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\right|^2 &= \left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\right) \\ &= \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}) - 2\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{a}|^2(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 - 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 + |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 \\ &= \left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\right)^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \ ,\end{aligned}$$

$\left|\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\right|^2 \geq 0$ なので $\left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\right)^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \geq 0$ ，よって

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \leq \left(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\right)^2 \ .$$

$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \geq 0$ なので $-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \leq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \leq |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ．　（証明終り）