§1.7 平面ベクトルの内積

平面ベクトルについて**内積** (innner product) といわれるものを定義します.

定義 各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について，平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ との内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ を次のように定義する：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 \ .$$

平面ベクトルの内積はスカラー（実数）でありベクトルではありません. 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積（を表す式） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との間の点 "$\cdot$" は省略してはいけません.

$\boxed{\text{例題}}$ 平面ベクトルの内積

$$(5,6)\cdot(8,-7)\ , \qquad (5,-3)\cdot\left(2, \frac{10}{3}\right)\ , \qquad \left(-2, \sqrt{3}\right)\cdot\left(5, 2\sqrt{3}\right)$$

を計算する.

$$(5,6)\cdot(8,-7) = 5\cdot 8 + 6\cdot(-7) = 40 - 42 = -2\ .$$
$$(5,-3)\cdot\left(2, \frac{10}{3}\right) = 5\cdot 2 + (-3)\cdot\frac{10}{3} = 10 - 10 = 0\ .$$
$$\left(-2, \sqrt{3}\right)\cdot\left(5, 2\sqrt{3}\right) = -2\cdot 5 + \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = -10 + 6 = -4\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.7.1}}$ 平面ベクトルの以下の内積を計算しなさい.

(1) $(7,8)\cdot(9,-6)$. (2) $\left(\frac{7}{6}, \frac{9}{2}\right)\cdot(3,5)$. (3) $\left(\sqrt{5}, 4\right)\cdot\left(2\sqrt{5}, -3\right)$.

$\boxed{\text{問題 1.7.2}}$ 次のような実数 x を求めなさい：平面ベクトル $(x, 2)$ と $(3, 5)$ との内積は 0 である.

平面ベクトルの内積に関する定理をいくつか述べます.

定理 1.7.1 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ および任意のスカラー p, q について，以下のことが成り立つ：

(内積の交換法則) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(内積の結合法則) $(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$, $\boldsymbol{a}\cdot(p\boldsymbol{b}) = p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$;

(内積の分配法則) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = 0$.

証明 実数 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ に対して $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2\ ,$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = (b_1, b_2)\cdot(a_1, a_2) = b_1a_1 + b_2a_2 = a_1b_1 + a_2b_2\ ,$$

よって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

$$(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = \{p(a_1, a_2)\}\cdot(b_1, b_2) = (pa_1, pa_2)\cdot(b_1, b_2) = pa_1b_1 + pa_2b_2\ ,$$
$$p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = p\{(a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2)\} = p(a_1b_1 + a_2b_2) = pa_1b_1 + pa_2b_2\ ,$$

よって $(p\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} = p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$. 同様に $\boldsymbol{a}\cdot(p\boldsymbol{b}) = p(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) &= (a_1, a_2)\cdot\{(b_1, b_2) + (c_1, c_2)\} = (a_1, a_2)\cdot(b_1 + c_1, b_2 + c_2)\\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} &= (a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) + (a_1, a_2)\cdot(c_1, c_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2\\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2\ ,\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$. 同様に $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

$$\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{a} = (0,0)\cdot(a_1, a_2) = 0\cdot a_1 + 0\cdot a_2 = 0\ .$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0} = (a_1, a_2)\cdot(0,0) = a_1\cdot 0 + a_2\cdot 0 = 0\ .$$

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$ 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 7$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 8$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 6$ とする. ベクトル $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ と $5\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) &= 2\boldsymbol{a}\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) + 3\boldsymbol{b}\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\\ &= 2\boldsymbol{a}\cdot 5\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{a}\cdot 4\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{b}\cdot 5\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}\cdot 4\boldsymbol{b}\\ &= 10\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} - 8\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + 15\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 12\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\ &= 10\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 7\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 12\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\ ,\end{aligned}$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 7$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 8$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 6$ なので,

$$10\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 7\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - 12\,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 10\cdot 7 + 7\cdot 6 - 12\cdot 8 = 70 + 42 - 96 = 16\ .$$

よって $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}) = 16$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.7.3}}$ 平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とについて， $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 8$ かつ $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} = 7$ かつ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = -6$ とします. ベクトル $3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$ と $4\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$ との内積を計算しなさい.

任意の実数 a について $a^2 \geq 0$ でした. これと似たことが平面ベクトルについても成り立ちます.

定理 1.7.3 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} \geq 0$.

証明 実数 a_1, a_2 に対して $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)\cdot(a_1, a_2) = a_1a_1 + a_2a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2\ .$$

a_1, a_2 は実数なので ${a_1}^2 \geq 0$ かつ ${a_2}^2 \geq 0$, よって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = {a_1}^2 + {a_2}^2 \geq 0$.

（証明終り）

任意の実数 a について次のことが成り立ちました：

$$a^2 = 0 \iff a = 0$$

これと似たことが平面ベクトルの内積についても成り立ちます.

定理 1.7.4 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ について

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 \iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\ .$$

証明 実数 a_1, a_2 に対して $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ とおく.

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)\cdot(a_1, a_2) = a_1a_1 + a_2a_2 = {a_1}^2 + {a_2}^2\ .$$

a_1, a_2 は実数なので ${a_1}^2 \geq 0$, ${a_2}^2 \geq 0$. 従って

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = 0 &\iff {a_1}^2 + {a_2}^2 = 0 \iff {a_1}^2 = 0 \text{ かつ } {a_2}^2 = 0\\ &\iff a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0\\ &\iff \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\ .\end{aligned}$$

（証明終り）