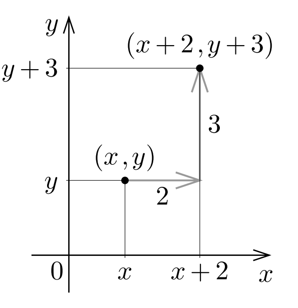
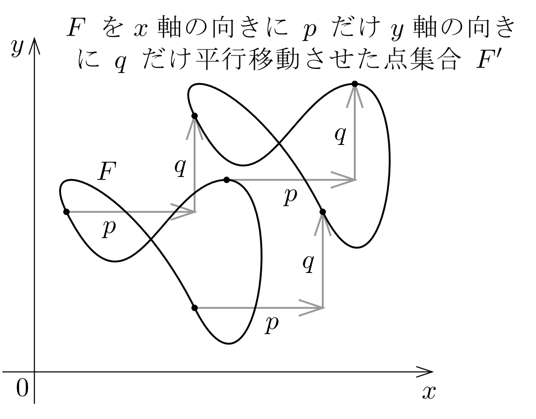
§1.6　座標平面における平行移動とベクトル



xy 座標平面において，例えば点 (x,y) を x 軸の向きに 2 だけ y 軸の向きに 3 だけ移動させた点は $(x+2,y+3)$ です． 一般的に，xy 座標平面において，点 (x,y) を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点は $(x+p,y+q)$ です． xy 座標平面において，点集合 F の各点 (x,y) を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ移動させた点 $(x+p,y+q)$ の全体を，F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点集合といいます． つまり，点集合 F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点集合とは

$$\{\, (x+p,y+q) \mid (x,y) \in F \,\}$$



のことです． 座標平面において図形を平行移動させると，位置が変わるだけで，形も大きさも向きも変わりません．

xy 座標平面において，図形 F の平行移動させた図形 F' とは，ある定数 p と q とがあって，F を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた図形です：

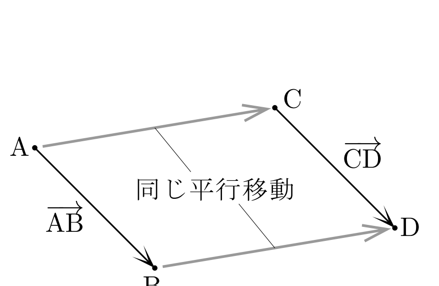
$$F' = \{\, (x+p,y+q) \mid (x,y) \in F \,\} \ .$$

次の定理の証明は後回しにします．

定理 1.6.1　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ について以下のことが成り立つ．

(1)　ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移るならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ．

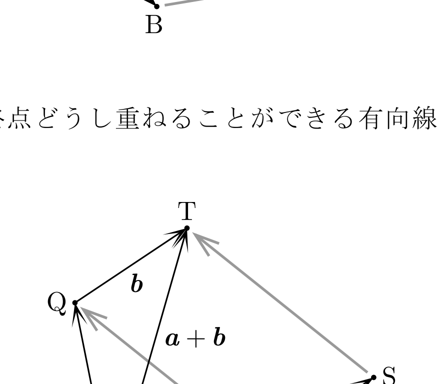
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ならば，ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移る．



この定理より，平行移動によって始点どうし終点どうし重ねることができる有向線分は同じベクトルを表します．

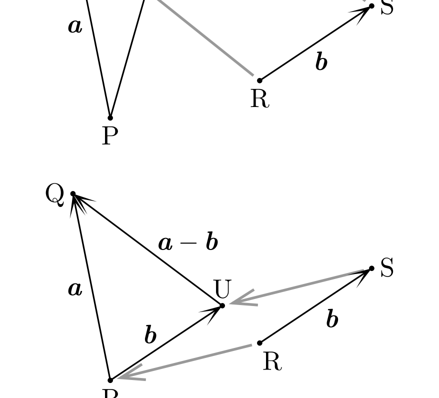
座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{P,Q,R,S}$ に対して，ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を考えます． 右図のように，点 R が点 Q に移る平行移動によって，点 S が点 T に移るとします． このとき，定理 1.6.1 より $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{QT}}$ なので，定理 1.5.4 より

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QT}} = \overrightarrow{\mathrm{PT}} \ .$$



また，右図のように，点 R が点 P に移る平行移動によって，点 S が点 U に移るとします． このとき，定理 1.6.1 より $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{PU}}$ なので，定理 1.5.4 より

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PU}} = \overrightarrow{\mathrm{UT}} \ .$$

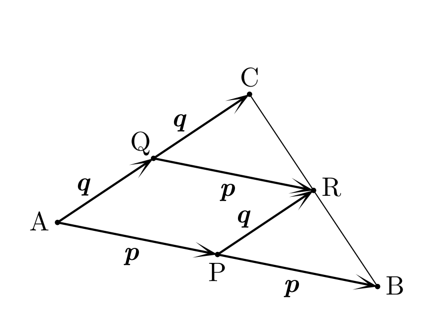


$\boxed{例}$　座標平面の互いに異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ に対して，線分 AB の中点を P と，線分 AC の中点を Q と，線分 BC の中点を R とおく． 平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とを考える． ある平行移動で点 Q が点 A に点 R が点 P に移るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{p} \ .$$

ある平行移動で点 P が点 A に点 B が点 P に移るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boldsymbol{p} \ .$$



ある平行移動で点 P が点 A に点 R が点 Q に移るので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{q} \ .$$

ある平行移動で点 Q が点 A に点 C が点 Q に移るので，

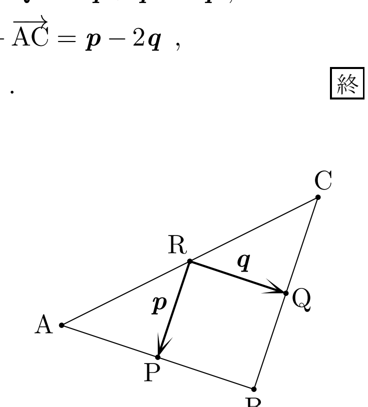
$$\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{q} \ .$$

これらのことより以下の等式が成り立つ：

$$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = -\overrightarrow{\mathrm{QR}} = -\boldsymbol{p} \ , \qquad \overrightarrow{\mathrm{RP}} = -\overrightarrow{\mathrm{PR}} = -\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} \ , \quad \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p} \ , \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \boldsymbol{q}+\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{q}-2\boldsymbol{p} \ , \quad \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\boldsymbol{q}-2\boldsymbol{q} \ .$$

$\boxed{終}$

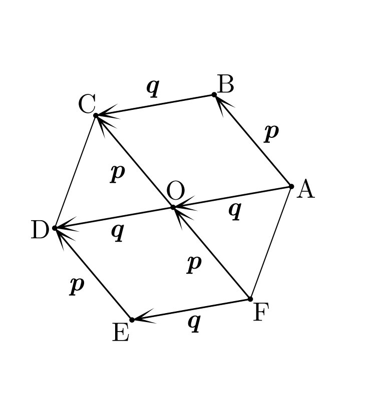
$\boxed{問題\ 1.6.1}$　座標平面の互いに異なる 3 点 $\mathrm{A,B,C}$ に対して，線分 AB の中点を P と，線分 BC の中点を Q と，線分 CQ の中点を R とおきます． 平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ とを考えます． 以下の平面ベクトルを $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 以外のベクトルが現れない式で表しなさい．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ ．　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$ ．　(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ ．　(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．
(5) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ．　(6) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ．　(7) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ．　(8) $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ ．

$\boxed{例}$　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D,E,F}$ について，右図のように六角形 ABCDEF が正六角形であるとします． その外接円の中心を O とおきます． 平面ベクトル $\boldsymbol{p} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{q} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とを考えます． このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{ED}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{p} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{q} \ .$$



これより，

$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = -\overrightarrow{\mathrm{ED}} = -\boldsymbol{p} \ , \qquad \overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\overrightarrow{\mathrm{FE}} = -\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p} \ ,$$

$\overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}}$ なので，

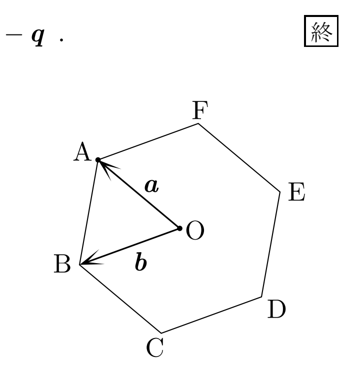
$$\overrightarrow{\mathrm{FA}} = \overrightarrow{\mathrm{FO}}-\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \boldsymbol{p}-\boldsymbol{q} \ .$$

更に，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \boldsymbol{q}+(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}) = 2\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}+(-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q}-2\boldsymbol{p} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -\boldsymbol{p}+(-\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EA}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}+\overrightarrow{\mathrm{FA}} = -\boldsymbol{q}+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}-2\boldsymbol{q} \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FB}} = \overrightarrow{\mathrm{FA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})+\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.6.2}$　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D,E,F}$ について，右図のように，六角形 ABCDEF が正六角形であるとします． その外接円の中心を O とおきます． 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平面ベクトル $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とを考えます． 以下の平面ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 以外のベクトルが現れない式で表しなさい．

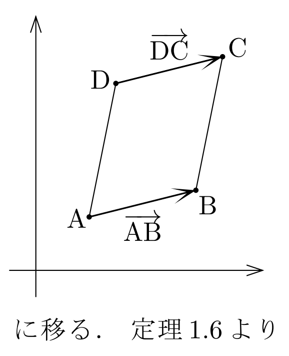


(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．　(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ ．　(3) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ．　(4) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ ．　(5) $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ ．　(6) $\overrightarrow{\mathrm{FA}}$ ．
(7) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ．　(8) $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ ．　(9) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ ．　(10) $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ ．　(11) $\overrightarrow{\mathrm{EA}}$ ．　(12) $\overrightarrow{\mathrm{FB}}$ ．

定理 1.6.1 より次の定理が導かれます．

定理 1.6.2　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ を頂点とする四角形 ABCD について，

$$\text{四角形 ABCD 平行四辺形である} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} \ .$$



証明　点 $\mathrm{A,B,C,D}$ を頂点とする四角形 ABCD があるとする．

四角形 ABCD は平行四辺形であると仮定する． この仮定より，ある平行移動で，点 A が点 D に，点 B が点 C に移る． 定理 1.6 より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と仮定する． 定理 1.6 より，ある平行移動で，点 A は点 D に移り，点 A は点 D に移る． 従って四角形 ABCD は平行四辺形である．　（証明終り）

$\boxed{例題}$　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ について，四角形 ABCD は平行四辺形で，$\mathrm{A} = (1,3)$ ，$\mathrm{B} = (5,4)$ ，$\mathrm{C} = (6,9)$ とする． 点 D を求める．

四角形 ABCD が平行四辺形である条件は $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ ． 点 D の位置ベクトルを $\boldsymbol{d}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5,4)-(1,3) = (4,1) \ , \qquad \overrightarrow{\mathrm{DC}} = (6,9)-\boldsymbol{d} \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$ より $(4,1) = (6,9)-\boldsymbol{d}$ なので，$\boldsymbol{d} = (6,9)-(4,1) = (2,8)$ ． 故に $\mathrm{D} = (2,8)$ ．　$\boxed{終}$

$\boxed{問題\ 1.6.3}$　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ について，四角形 ABCD は平行四辺形で，$\mathrm{A} = (3,-2)$ ，$\mathrm{B} = (5,6)$ ，$\mathrm{D} = (7,4)$ とします． 点 C を求めなさい．

$\boxed{問題\ 1.6.4}$　座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ について，四角形 ABCD は平行四辺形で，$\mathrm{B} = (4,2)$ ，$\mathrm{C} = (9,6)$ ，$\mathrm{D} = (2,9)$ ． とします． 点 A を求めなさい．

——— 定理の証明

定理 1.6.1　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ について以下のことが成り立つ．

(1)　ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移るならば，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ならば，ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移る．

証明　xy 座標平面の点 $\mathrm{A,B,C,D}$ を考える．

$\mathrm{A} = (a_1,a_2)$ ，$\mathrm{B} = (b_1,b_2)$ とおく． ある定数 p と q とに対して，x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させると，点 A が点 C に，点 B が点 D に移ると仮定する． $\mathrm{C} = (a_1+p,a_2+q)$ ，$\mathrm{D} = (b_1+p,b_2+q)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1,b_2)-(a_1,a_2) = (b_2-a_1,b_2-a_2) \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (b_1+p,b_2+q)-(a_1+p,a_2+q) = (b_1-a_1,b_2-a_2) \ .$$

故に $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ ．

逆に $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と仮定する． $\mathrm{A} = (a_1,a_2)$ ，$\mathrm{B} = (b_1,b_2)$ ，$\mathrm{C} = (c_1,c_2)$ ，$\mathrm{D} = (d_1,d_2)$ とおく．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1,b_2)-(a_1,a_2) = (b_1-a_1,b_2-a_2) \ ,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (d_1,d_2)-(c_1,c_2) = (d_1-c_1,d_2-c_2) \ .$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，

$$(b_1-a_1,b_2-a_2) = (d_1-c_1,d_2-c_2) \ ,$$
$$b_1-a_1 = d_1-c_1 \ \text{かつ}\ b_2-a_2 = d_2-c_2 \ ,$$
$$c_1-a_1 = d_1-b_1 \ \text{かつ}\ c_2-a_2 = d_2-b_2 \ ,$$

p,q を次のようにおく：

$$p = c_1-a_1 = d_1-b_1 \ , \qquad q = c_2-a_2 = d_2-b_2 \ .$$

$c_1 = a_1+p$ かつ $c_2 = a_2+q$ なので，点 $\mathrm{C} = (c_1,c_2)$ は点 $\mathrm{A} = (a_1,a_2)$ を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点である． $d_1 = b_1+p$ かつ $d_2 = b_2+q$ なので，点 $\mathrm{D} = (d_1,d_2)$ は点 $\mathrm{B} = (b_1,b_2)$ を x 軸の向きに p だけ y 軸の向きに q だけ平行移動させた点である．　（証明終り）