§1.5　座標平面の点とベクトル

実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ の要素は，加法および実数と $\mathbf{R}^2$ の要素との乗法を付け加えることによって平面ベクトルになりました．実数 a と b との順序対 (a,b) は，座標平面の点と考えることも平面ベクトルと考えることもできます．座標平面の点 P の座標 (a,b) を平面ベクトルと考えるとき，P の**位置ベクトル**といいます．

定義　各実数 a,b について，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して平面ベクトル (a,b) を点 P の位置ベクトルという．

この定義より，実数 a_1,a_2 に対して，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $\mathrm{A}=(a_1,a_2)$ の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおくと， $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ です．

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり，任意の平面ベクトル $\boldsymbol{p}$ に対して $\boldsymbol{p}$ を位置ベクトルとする点が唯一つ定まります．つまり座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点と平面ベクトルとは過不足なく一対一に対応します．

定理 1.5.1　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおくと，

$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\ .$$

証明　実数 a_1,a_2,b_1,b_2 について， $\mathrm{A}=(a_1,a_2)$ ， $\mathrm{B}=(b_1,b_2)$ とおくと， $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ ， $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ なので，

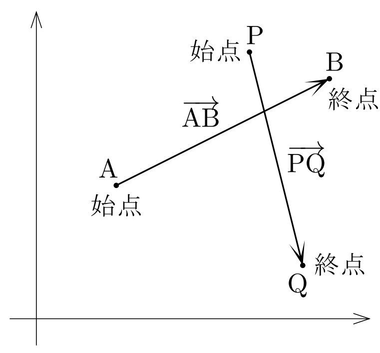
$$\mathrm{A}=\mathrm{B} \iff (a_1,a_2)=(b_1,b_2) \iff \boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\ .$$

（証明終り）

定義　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ とおく．点 A, B に対して，平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を次のように定義する：

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\ .$$

この定義により，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B に対して平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を考えることができます．このベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を，右図のように，線分 AB に点 A から点 B への“向き”を表す矢印を付けて表現します．このように向き付けられた線分をを有向線分といいます．点 A から点 B への有向線分において，点 A を始点といい，点 B を終点といいます．



例題　座標平面の点 $\mathrm{A}=(3,7)$ と $\mathrm{B}=(5,4)$ とに対して平面ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を求める．

点 A の位置ベクトルは $(3,7)$ で点 B の位置ベクトルは $(5,4)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,4)-(3,7)=(2,-3)\ .$$

終

問題 1.5　座標平面の点 $\mathrm{P}=(3,-4)$ と $\mathrm{Q}=(8,2)$ とに対してベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を求めなさい．

定理 1.5.2　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の原点を O とおくとき，この座標平面の任意の点 A に対してベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は A の位置ベクトルである．

証明　点 O は原点なので $\mathrm{O}=(0,0)$ ，従って点 O の位置ベクトルは $(0,0)$ つまり零ベクトル $\mathbf{0}$ である．点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおくと， $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{a}-\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$ ．従ってベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ は点 A の位置ベクトルである．（証明終り）

定理 1.5.3　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A について $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\mathbf{0}$ ．座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A, B について， $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ ならば $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ ．

証明　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく． $\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$ ． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ ならば， $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\mathbf{0}$ なので $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ ，よって定理 1.5.1 より $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ ．（証明終り）

定理 1.5.4　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A, B, C について，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ ,\qquad \overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}\ .$$

証明　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C の各々の位置ベクトルを $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ とおく． $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ ， $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ なので，

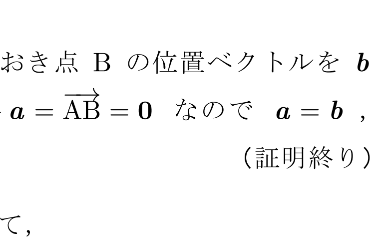
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ .$$

更にこの等式より $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．（証明終り）

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R について，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ との和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を図示ます．定理 1.5.4 より，

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}\ .$$

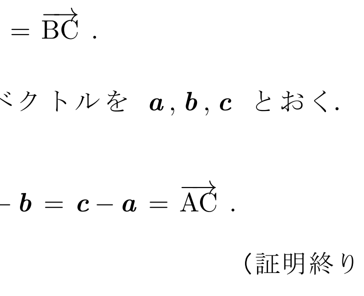
例えば右図のようになります．



また，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R について，ベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ との差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を図示します．定理 1.5.4 より，

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}-\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\ .$$

例えば右図のようになります．



定理 1.5.5　座標平面 $\mathbf{R}^2$ の任意の点 A と B とについて $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．

証明　定理 1.5.4 と定理 1.5.3 より $\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{BB}}=\mathbf{0}$ ，よって $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\mathbf{0}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ．

（証明終り）