§1.4　平面ベクトルの演算

平面ベクトルの演算について次の定理が成り立ちます.

定理　任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及び任意の実数 p,q について，以下のことが成り立つ：

(加法の交換法則)　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(加法の結合法則)　$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$;

$$\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}\ ;$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}\ ;$$

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\ ;$$

(スカラー倍の結合法則)　$p(q\boldsymbol{a})=(pq)\boldsymbol{a}$;

(スカラー倍の分配法則)　$p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$,　　$(p+q)\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{a}$.

これらのうちのいくつかを証明します.

各実数 a_1,a_2,b_1,b_2 対して，平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ とについて,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2)\ ,$$
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=(b_1,b_2)+(a_1,a_2)=(b_1+a_1,b_2+a_2)=(a_1+b_1,\,a_2+b_2)\ ,$$

よって $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

各実数 a_1,a_2 について，平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ に対して， $-\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2)$ なので,

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(a_1,a_2)+(-a_1,-a_2)=\big(a_1+(-a_1),\,a_2+(-a_2)\big)=(0,0)=\boldsymbol{0}\ ,$$
$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=(-a_1,-a_2)+(a_1,a_2)=(-a_1+a_1,-a_2+a_2)=(0,0)=\boldsymbol{0}\ .$$

よって， $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$, $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

各実数 a_1,a_2,b_1,b_2 について，平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$ と $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$ と任意の実数 p とに対して,

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=p\{(a_1,a_2)+(b_1,b_2)\}=p(a_1+b_1,a_2+b_2)=\big(p(a_1+b_1),p(a_2+b_2)\big)\\&=(pa_1+pb_1,pa_2+pb_2)\ ,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}&=p(a_1,a_2)+p(b_1,b_2)=(pa_1,pa_2)+(pb_1,pb_2)\\&=(pa_1+pb_1,pa_2+pb_2)\ ,\end{aligned}$$

よって $p(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=p\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}$.

平面ベクトル $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ などに実数（スカラー）p,q,r などを掛けて足し合わせた形の式

$$p\boldsymbol{a}\ ,\qquad p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}\ ,\qquad p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$$

などはやはり平面ベクトルを表します. $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}$ の形の式をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との**線形結合**といいます. $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}$ の形の式をベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合といいます. 線形結合は1次結合ということもあります.

$\boxed{\text{例題}}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対して平面ベクトル $\boldsymbol{p}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{q}=4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ とを考える. 平面ベクトル $6\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}$ と $5\boldsymbol{p}-6\boldsymbol{q}$ とを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表す.

$$6\boldsymbol{p}+5\boldsymbol{q}=6(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+5(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=12\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+20\boldsymbol{a}-15\boldsymbol{b}=32\boldsymbol{a}-9\boldsymbol{b}\ .$$
$$5\boldsymbol{p}-6\boldsymbol{q}=5(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-6(4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=10\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-24\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}=23\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{a}\ .$$ $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.4.1}}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ とに対して平面ベクトル $\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ とを考えます. 平面ベクトル $5\boldsymbol{p}+6\boldsymbol{q}$ と $6\boldsymbol{p}-5\boldsymbol{q}$ とを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表しなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(5,7)$ と $\boldsymbol{b}=(6,8)$ とに対して，平面ベクトル $\boldsymbol{p}=(2,4)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表す.

〔解説〕 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合は，ある実数 x と y とに対するベクトル $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ のことである. $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ となる実数 x と y とを求める.

〔解答〕 実数を表す変数 x,y に対して,

$$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x(5,7)+y(6,8)=(5x+6y,7x+8y)\ .$$

$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}$ とすると,

$$(5x+6y,7x+8y)=(2,4)\ ,$$
$$5x+6y=2\ \text{かつ}\ 7x+8y=4\ .$$

この連立方程式を解くと， $x=4$ かつ $y=-3$. 故に $\boldsymbol{p}=4\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 1.4.2}}$　平面ベクトル $\boldsymbol{a}=(4,5)$ と $\boldsymbol{b}=(-3,-2)$ とに対して，平面ベクトル $\boldsymbol{p}=(7,8)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表しなさい.