§1.3　平面ベクトル

実数の順序対の全体

$$\mathbf{R}^2 = \{\,(x,y) \mid x, y \text{ は実数}\,\}$$

において以下のような演算を考えます．各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について，$\mathbf{R}^2$ の要素 (a_1,a_2) と (b_1,b_2) との和を次のように定義します：

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2)\ .$$

この和をベクトル和といいます．更に，各実数 a_1, a_2, p について，実数 p と $\mathbf{R}^2$ の要素 (a_1,a_2) との積を次のように定義します：

$$p(a_1,a_2) = (pa_1, pa_2)\ .$$

この積をスカラー倍といいます．

実数 x と y との順序対 (x,y) にベクトル和及びスカラー倍の演算を行うとき，実数の順序対を**２次元実ベクトル** [2] (2-dimensional real vector) あるいは**平面ベクトル**あるいは略して**ベクトル**といいます．平面ベクトルに対して実数のことを**スカラー**といいます．平面ベクトル (x,y) を構成する実数 x と y とをベクトル (x,y) の**成分**といいます．

例　平面ベクトル $(2,-3)$ と $(-6,8)$ とのベクトル和は

$$(2,-3)+(-6,8) = \bigl(2+(-6), -3+8\bigr) = (-4,5)\ .$$

平面ベクトル $(7,-5)$ とスカラー $\dfrac{3}{2}$ との積は

$$\frac{3}{2}(7,-5) = \Bigl(\frac{3}{2}\cdot 7, \frac{3}{2}\cdot(-5)\Bigr) = \Bigl(\frac{21}{2}, -\frac{15}{2}\Bigr)\ .$$

終

実数 x と y との順序対 (x,y) を座標平面の点（の座標）と考えるとき，1.1節で述べたように，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ は座標平面です．実数 x と y との順序対 (x,y) を平面ベクトルと考えるとき，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ を２次元実ベクトル空間あるいはベクトル平面といいます．実数 x と y との順序対 (x,y) は，座標平面の点と考えることもベクトル平面のベクトルと考えることもできます．座標平面の点と考えると和とか積とかの演算はできません．しかし，ベクトル平面のベクトルと考えるとベクトル和およびスカラー倍の演算ができます．

以後，平面ベクトルを太文字で表します．

平面ベクトル $(0,0)$ を**零ベクトル**といい，$\mathbf{0}$ と書き表します：

$$\mathbf{0} = (0,0)\ .$$

定理 1.3.1　零ベクトル $\mathbf{0}$ 及び任意の平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ について　$0\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ ．

証明　実数 a_1, a_2 に対して　$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$　とおくと，

$$0\boldsymbol{a} = 0\cdot(a_1,a_2) = (0\cdot a_1, 0\cdot a_2) = (0,0) = \mathbf{0}\ .$$

（証明終り）

定理 1.3.2　零ベクトル $\mathbf{0}$ および任意の実数 p について　$p\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ．

証明　$\mathbf{0} = (0,0)$　なので，

$$p\mathbf{0} = p\cdot(0,0) = (p\cdot 0, p\cdot 0) = (0,0) = \mathbf{0}\ .$$

（証明終り）

平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対し，実数 -1 とベクトル $\boldsymbol{a}$ とのスカラー積 $-1\boldsymbol{a}$ を $-\boldsymbol{a}$ と略記します：$-\boldsymbol{a} = -1\cdot\boldsymbol{a}$ ．平面ベクトル $\boldsymbol{a}$ に対して，ベクトル $-\boldsymbol{a}$ を $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルといいます．

定理 1.3.3　各実数 a_1, a_2 について，平面ベクトル　$\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$　に対して　$-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2)$ ．

証明

$$-\boldsymbol{a} = -1\cdot(a_1,a_2) = (-1a_1, -1a_2) = (-a_1, -a_2)\ .$$

（証明終り）

平面ベクトル　$\boldsymbol{a}$　と　$\boldsymbol{b}$　とに対し，　$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$　を　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　と書き表します：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ ．

定理 1.3.4　各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について，平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2)$　と　$\boldsymbol{b} = (b_1,b_2)$ とに対して　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2)$ ．

証明

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) = (a_1,a_2)+\bigl(-(b_1,b_2)\bigr)\\ &= (a_1,a_2)+(-b_1,-b_2) = \bigl(a_1+(-b_1), a_2+(-b_2)\bigr)\\ &= (a_1-b_1, a_2-b_2)\ .\end{aligned}$$

（証明終り）

例　平面ベクトル $(9,5)$ から平面ベクトル $(7,-3)$ を引く：

$$(9,5)-(7,-3) = \bigl(9-7, 5-(-3)\bigr) = (2,8)\ .$$

終

例題　平面ベクトル　$\boldsymbol{a} = (-2,4)$　と　$\boldsymbol{b} = (5,-6)$　とに対して平面ベクトル $8(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ を計算する．

$$\begin{aligned}8(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= 8\{(-2,4)+(5,-6)\} = 8\bigl(-2+5, 4+(-6)\bigr) = 8(3,-2) = \bigl(8\cdot 3, 8\cdot(-2)\bigr)\\ &= (24,-16)\ .\end{aligned}$$

終

例題　平面ベクトル　$\boldsymbol{a} = (2,3)$　と　$\boldsymbol{b} = (-4,7)$　とに対して平面ベクトル $8\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ を計算する．

$$\begin{aligned}8\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b} &= 8(2,3)-5(-4,7) = (8\cdot 2, 8\cdot 3)-\bigl(5\cdot(-4), 5\cdot 7\bigr)\\ &= (16,24)-(-20,35) = \bigl(16-(-20), 24-35\bigr)\\ &= (36,-11)\ .\end{aligned}$$

終

問題 1.3.1　平面ベクトル　$\boldsymbol{a} = (4,7)$　と　$\boldsymbol{b} = (6,-8)$　とに対して平面ベクトル $5\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ を計算しなさい．

問題 1.3.2　平面ベクトル　$\boldsymbol{a} = (8,4)$　と　$\boldsymbol{b} = (2,-5)$　とに対して平面ベクトル $7(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ を計算しなさい．

例題　次のような実数 x と y とを求める：$x(9,5)+(6,2) = y(8,4)$ ．

与えられた等式より，

$$x(9,5)+(6,2)-(6,2)-y(8,4) = y(8,4)-y(8,4)-(6,2)\ ,$$
$$x(9,5)-y(8,4) = -(6,2)\ ,$$

左辺は　$x(9,5)-y(8,4) = (9x,5x)-(8y,4y) = (9x-8y, 5x-4y)$　なので，

$$(9x-8y, 5x-4y) = (-6,-2)\ ,$$
$$9x-8y = -6 \quad \text{かつ} \quad 5x-4y = -2\ .$$

この連立方程式を解くと，　$x = 2$　かつ　$y = 3$ ．

終

問題 1.3.3　次のような実数 x と y とを求めなさい：$x(4,7)-(5,2) = y(-3,6)$ ．

例題　平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式　$9\boldsymbol{x}+(2,-3) = 5\boldsymbol{x}+(7,6)$　を解く．

$9\boldsymbol{x}+(2,-3) = 5\boldsymbol{x}+(7,6)$　より，　$9\boldsymbol{x}-5\boldsymbol{x} = (7,6)-(2,-3)$ ，　$4\boldsymbol{x} = (5,9)$ ，$\boldsymbol{x} = \dfrac{1}{4}(5,9) = \Bigl(\dfrac{5}{4}, \dfrac{9}{4}\Bigr)$ ．

終

問題 1.3.4　平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式　$5\boldsymbol{x}+(3,-2) = -4\boldsymbol{x}+(8,6)$　を解きなさい．

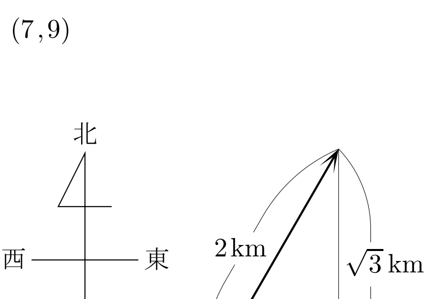
――――― ベクトルの意義

平面ベクトルの一つの解釈として，平面ベクトル (a_1,a_2) （a_1, a_2 は実数）は“東へ $a_1$km 北へ $a_2$km の移動”を表すとします．このとき，例えば，“東へ 5km 北へ 6km の移動”を表すベクトル $(5,6)$ と“東へ 2km 北へ 3km の移動”を表すベクトル $(2,3)$ との和

$$(5,6)+(2,3) = (7,9)$$

は“東へ 7km 北へ 9km の移動”を表します．

移動には移動する距離と移動する向きとがあります．例えば“東へ 1km 北へ $\sqrt{3}$km の移動”について，移動距離は 2km で，移動の向きは東から北へ 60° の向きです．このように，ベクトルによって“向き”を特定することができます．移動ではどちら向きの移動かが重要です．



大きさと向きとがある量をベクトル量といいます．移動（変位）とか速度とか加速度とか運動量とかはベクトル量です．物体に力を加えるとき，力の大きさだけでなく力の向きも重要になります；ですから力もベクトル量です．力の釣り合いなどを考えるときはベクトルの計算が必要になります．このように少なからずの物理量には大きさと向きとがあるのでベクトル量です．従って物理学ではベクトルの概念が有用になります．

数学では，座標空間における図形を調べるのにベクトルを用います．

[2] 実ベクトルとは成分が実数であるベクトルのことです．