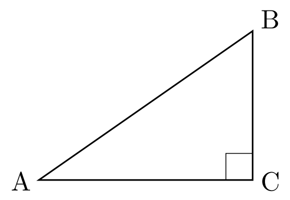
§1.2　座標平面における 2 点間の距離

まずピタゴラスの定理[1]を思い起こして下さい．

定理（ピタゴラスの定理）　相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする三角形 ABC において角 ACB が直角であるとき，



$$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2 .$$

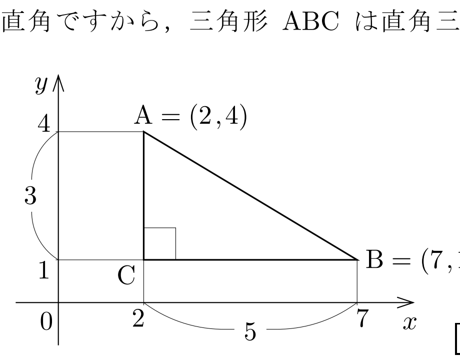
例解　座標平面において点 $\mathrm{A}=(2,4)$ と点 $\mathrm{B}=(7,1)$ との間の距離 $\overline{\mathrm{AB}}$ を求めます．点 $\mathrm{C}=(1,5)$ を考えます．角 ACB が直角ですから，三角形 ABC は直角三角形です．ピタゴラスの定理より，

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2 .$$

$\overline{\mathrm{AC}}=|1-4|=3$ ，$\overline{\mathrm{BC}}=|2-7|=5$ なので，

$$\overline{\mathrm{AC}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2=3^2+5^2=34 .$$

故に $\overline{\mathrm{AB}}^2=34$ なので $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{34}$ ．



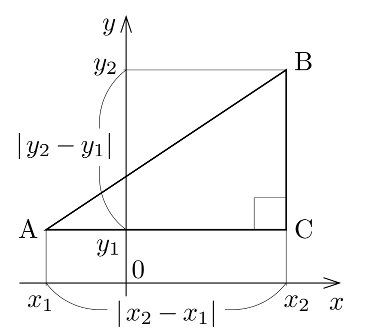
終

一般的には次の定理のようになります．

定理 1.2　座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，実数 x_1, y_1, x_2, y_2 に対して点 $\mathrm{P}=(x_1,y_1)$ と点 $\mathrm{Q}=(x_2,y_2)$ との間の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ は

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} .$$

証明　点 $\mathrm{P}=(x_1,y_1)$ 及び点 $\mathrm{Q}=(x_2,y_2)$ に対して，座標平面の点 $\mathrm{R}=(x_2,y_2)$ をとる．線分 AC は x 軸と平行であり，線分 BC は y 軸と平行である．よって，三角形 ABC は ∠ACB を直角とする直角三角形である．従って，ピタゴラスの定理より，



$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RQ}}^2 .$$

$\mathrm{P}=(x_1,y_1)$ ，$\mathrm{R}=(x_2,y_1)$ なので，$\overline{\mathrm{PR}}=|x_2-x_1|$ ，

$$\overline{\mathrm{PR}}^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2 .$$

$\mathrm{Q}=(x_2,y_2)$ ，$\mathrm{R}=(x_2,y_1)$ なので，$\overline{\mathrm{BC}}=|a_2-b_2|$ ，

$$\overline{\mathrm{RQ}}^2=|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2 .$$

故に，

$$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PR}}^2+\overline{\mathrm{RQ}}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 .$$

（証明終り）

例題　xy 座標平面において，点 P の x 座標は 3 であり，点 $\mathrm{A}=\left(9,\frac{5}{8}\right)$ と P との間の距離が 7 であるとする．このような点 P を求める．

〔解答〕点 P の y 座標を y とおく．$\mathrm{P}=(3,y)$ なので，

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(3-9)^2+\left(y-\frac{5}{8}\right)^2=\left(y-\frac{5}{8}\right)^2+36 .$$

$\overline{\mathrm{AP}}=7$ なので，$\overline{\mathrm{AP}}^2=7^2=49$ ．　$\left(y-\frac{5}{8}\right)^2+36=49$ ，$\left(y-\frac{5}{8}\right)^2=13$ ，$y-\frac{5}{8}=\pm\sqrt{13}$ ，$y=\frac{5}{8}\pm\sqrt{13}$ ．故に $\mathrm{P}=(2,y)=\left(3,\frac{5}{8}\pm\sqrt{13}\right)$ ．

〔補足〕この解答において方程式 $\left(y-\frac{5}{8}\right)^2+36=49$ を解くために左辺を展開して整理すると $y^2-\frac{5}{4}y-\frac{807}{64}=0$ となり計算が大変になります．

終

問題 1.2.1　xy 座標平面において，点 P の y 座標は 5 であり，点 $\mathrm{A}=\left(\frac{6}{7},-3\right)$ と P との間の距離が 9 であるとします．このような点 P を求めなさい．

例題　xy 座標平面において，点 P の x 座標は 8 であり，点 $\mathrm{A}=(4,5)$ と P との間の距離と点 $\mathrm{B}=(6,3)$ と P との間の距離とが等しいとする．このような点 P を求める．

点 P の y 座標を y とおく．$\mathrm{P}=(8,y)$ なので，

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(8-4)^2+(y-5)^2=16+y^2-10y+25=y^2-10y+41 ,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}^2=(8-6)^2+(y-3)^2=4+y^2-6y+9=y^2-6y+13 .$$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ なので $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ ，よって

$$y^2-10y+41=y^2-6y+13 ,$$

$-4y=-28$ ，$y=7$ ．故に $\mathrm{P}=(8,y)=(8,7)$ ．

終

問題 1.2.2　xy 座標平面において，点 P の y 座標は 9 であり，点 $\mathrm{A}=(5,7)$ と P との間の距離と点 $\mathrm{B}=(6,8)$ と P との間の距離とが等しいとします．このような点 P を求めなさい．

例題　座標平面において，点 P は，点 $\mathrm{A}=(1,4)$ との間の距離と点 $\mathrm{B}=(2,3)$ との間の距離と点 $\mathrm{C}=(5,-4)$ との間の距離とが等しいとする．このような点 P を求める．

実数 x, y について $\mathrm{P}=(x,y)$ とする．

$$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-1)^2+(y-4)^2=x^2-2x+y^2-8y+17 ,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-2)^2+(y-3)^2=x^2-4x+y^2-6y+13 ,$$
$$\overline{\mathrm{CP}}^2=(x-5)^2+\{y-(-4)\}^2=x^2-10x+y^2+8y+41 .$$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ なので，$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ ，

$$x^2-2x+y^2-8y+17=x^2-4x+y^2-6y+13 ,$$

整理すると，$2x-2y=-4$ ，$x-y=-2$ ．$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{CP}}$ なので，$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{CP}}^2$ ，

$$x^2-2x+y^2-8y+17=x^2-10x+y^2+8y+41 ,$$

整理すると，$8x-16y=24$ ，$x-2y=3$ ．連立方程式

$$x-y=-2 \text{ かつ } x-2y=3$$

を解くと，$x=-7$ かつ $y=-5$ ．故に $\mathrm{P}=(x,y)=(-7,-5)$ ．

終

問題 1.2.3　座標平面において，点 P は，点 $\mathrm{A}=(-1,6)$ との間の距離と点 $\mathrm{B}=(-4,3)$ との間の距離と点 $\mathrm{C}=(5,4)$ との間の距離とが等しいとします．このような点 P を求めなさい．

前節で述べたように，座標系の 2 本の座標軸は垂直に交わることを前提にしました．このような座標系を特に直交座標系あるいはデカルト座標系といいます[2]．つまり，前節で述べた座標系は直交座標系です．本節の定理 1.2 は直交座標系で成り立つ定理です．2 本の座標軸が垂直に交わることを前提にしない座標系もあります．

---

[1] 三平方の定理ともいいます．ピタゴラス (Pythagoras) は紀元前 5 世紀頃の古代ギリシャの数学者・自然哲学者です．

[2] デカルトは 17 世紀のフランスの哲学者で数学者です．