§ 0.4　根号

数 a に対して，$x^2=a$ となる数 x を a の**平方根**といいます．つまり数 a の平方根とは2乗すると a になる数のことです．例えば，$3^2=9$，$(-3)^2=9$ なので，3 と -3 とは 9 の平方根です．一般に，任意の数 x について，定理1.3より $(-x)^2=x^2$ ですから，x が a の平方根ならば $-x$ も a の平方根です．

平方根の存在に関して次の定理が成り立ちます．その証明は省きます．

定理 0.4.1　0 以上の任意の実数 a に対して，2乗すると a になる 0 以上の実数が唯一つある．

定義　0 以上の任意の実数 a に対して，2乗すると a になる 0 以上の実数を $\sqrt{a}$ と書き表す．

つまり，0 以上の実数 a に対して $\sqrt{a}$ は a の 0 以上の平方根です．例えば，9 の平方根には 3 と -3 とがありますが，$\sqrt{9}$ はそれらのうち 0 以上の方を表します：$\sqrt{9}=3$．

記号 $\sqrt{}$ を根号といいます．$\left(\sqrt{A}\right)^2$ を $\sqrt{A}^2$ のように略します．

例えば，$\sqrt{3}$ は2乗すると 3 になる実数なので，$\sqrt{3}^2=3$．また，$\sqrt{3^2}=\sqrt{9}=3$．一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 0.4.2　$a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt{a}^2 = a\,, \qquad \sqrt{a^2} = a\,.$$

証明　根号の定義より $\sqrt{a}$ は2乗すると a になる数なので，$\sqrt{a}^2=a$．

根号の定義より，$\sqrt{a^2}$ は2乗すると a^2 になる 0 以上の実数である．a は2乗すると a^2 になり 0 以上の実数である．定理0.4.1より, 2乗すると a^2 になる 0 以上の実数は一つしかない．従って $\sqrt{a^2}=a$ [7]．（証明終り）

$0=0^2$，$1=1^2$ ですから，定理0.4.2より，

$$\sqrt{0} = \sqrt{0^2} = 0\,, \qquad \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1\,.$$

例えば負の実数 $a=-3$ について，$-a=3$ なので，

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -a\,.$$

このように次の定理が成り立ちます．

定理 0.4.3　$a \leq 0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a^2}=-a$．

証明　実数 a について $a \leq 0$ とする．定理1.5.5より $-a \geq 0$．定理1.3より $a^2=(-a)^2$ なので，$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}$，$-a \geq 0$ なので定理0.4.2より $\sqrt{(-a)^2}=-a$，故に $\sqrt{a^2}=-a$．（証明終り）

例えば $\sqrt{9+4^2}$ と $\sqrt{9+4}^2$ との違いに注意して下さい：

$$\sqrt{9+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\,,$$
$$\sqrt{9+4}^2=\sqrt{13}^2=13\,.$$

定理 0.4.4　$a>0$ である任意の実数 a について $\sqrt{a}>0$．

証明　$a>0$ なので定理1.5.3より $a \neq 0$．仮に $\sqrt{a}=0$ とすると，$\sqrt{a}^2=0$，定理0.4.2より $\sqrt{a}^2=a$ なので $a=0$．ところが $a \neq 0$ なので，$\sqrt{a} \neq 0$．

根号の定義より $\sqrt{a} \geq 0$ なので，定理1.5.1より，$\sqrt{a}>0$ または $\sqrt{a}=0$；$\sqrt{a} \neq 0$ なので $\sqrt{a}>0$．（証明終り）

定理 0.4.5　$a \geq 0$，$b \geq 0$ である任意の実数 a と b とについて，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}\,, \qquad b>0 \text{ のとき } \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

証明　$a \geq 0$，$b \geq 0$ なので，定理0.4.2より $\sqrt{a}^2=a$，$\sqrt{b}^2=b$．

指数法則を用いると

$$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \cdot \sqrt{b}^2 = a \cdot b = ab\,,$$

よって $ab=\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$．従って

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2}\,.$$

$\sqrt{a} \geq 0$，$\sqrt{b} \geq 0$ より $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ なので，定理0.4.2より

$$\sqrt{\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2} = \sqrt{a}\sqrt{b}\,.$$

故に $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$．

$b>0$ とする．定理0.4.4より $\sqrt{b}>0$．定理1.5.11より $\dfrac{1}{\sqrt{b}}>0$．指数法則を用いると

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}^2} = \frac{a}{b}\,,$$

よって $\dfrac{a}{b}=\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \geq 0$．従って

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2}\,.$$

$\sqrt{a} \geq 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{b}}>0$ より $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{a}\dfrac{1}{\sqrt{b}} \geq 0$ なので，定理0.4.2より

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,,$$

故に $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$．（証明終り）

---

[7] この部分は次のような論法です：“2乗すると a になる 0 以上の実数” ということを 〜〜 と略記すると，(1) $\sqrt{a^2}$ は 〜〜 である；(2) a は 〜〜 である；(3) 〜〜 は一つしかない；(4) 従って $\sqrt{a^2}=a$ である．