

8.3 大標本による母比率の検定

母集団に属す各々の事物について、ある性質 A を持つか持たないかのどちらかであるとする。このような母集団を 2 項母集団といった。

母集団に属す各々の事物について、ある性質 A を持つか持たないかのどちらかであるとする。このような母集団を 2 項母集団といった。標本調査の結果から、母集団全体のなかでこの性質 A を持つ事物の占める割合、母比率について仮説検定をする。

母集団に属す各々の事物について、ある性質 A を持つか持たないかのどちらかであるとする。このような母集団を 2 項母集団といった。標本調査の結果から、母集団全体のなかでこの性質 A を持つ事物の占める割合、母比率について仮説検定をする。2 項母集団に属す各々の事物について、性質 A を持つときその属性は 1 であり、性質 A を持たないとき属性は 0 であるとする。このとき、母比率は母平均と同じであり、標本比率は標本平均と同じである。

母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.4.2 により、標本比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う。

[定理 5.4.2] 母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとき、標本比率を表す確率変数は近似的に正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う。

母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする. 定理 5.4.2 により, 標本比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う. 標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので, R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従うとして確率を考える.

母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする. 定理 5.4.2 により, 標本比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う. 標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので, R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従うとして確率を考える. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

母比率が ρ である無限 2 項母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする. 定理 5.4.2 により, 標本比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従う. 標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので, R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{n}\right)$ に従うとして確率を考える. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 標準正規分布を用いる仮説検定を Z 検定という.

与えられた実数 p に対して，仮説 $\rho \neq p$ 及び仮説 $\rho > p$ 及び仮説 $\rho < p$ を検討する．

与えられた実数 p に対して、仮説 $\rho \neq p$ 及び仮説 $\rho > p$ 及び仮説 $\rho < p$ を検討する。標本比率 R を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

与えられた実数 p に対して、仮説 $\rho \neq p$ 及び仮説 $\rho > p$ 及び仮説 $\rho < p$ を検討する。標本比率 R を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。母比率 ρ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。

与えられた実数 p に対して、仮説 $\rho \neq p$ 及び仮説 $\rho > p$ 及び仮説 $\rho < p$ を検討する。標本比率 R を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。母比率 ρ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 ρ を与えられた実数 p で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$$

を検定統計量とする。

確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は、標準正規分布に従うので確率を計算できるが、実現値を計算できない。確率変数 $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ は、標本調査の結果により実現値を計算できるが、確率を計算できない。

与えられた実数 p に対して、仮説 $\rho \neq p$ 及び仮説 $\rho > p$ 及び仮説 $\rho < p$ を検討する。標本比率 R を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。母比率 ρ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 ρ を与えられた実数 p で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$$

を検定統計量とする。0 に近い正の実数 α を有意水準とする。

仮説 $\rho \neq p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho = p$ を立てる.

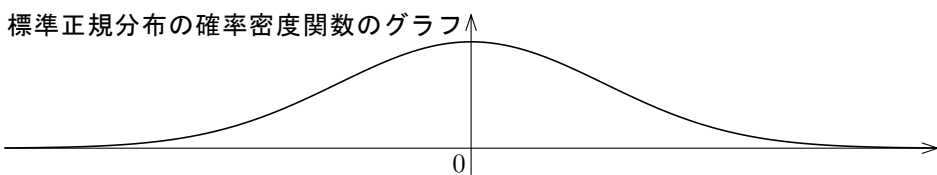
仮説 $\rho \neq p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho = p$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

仮説 $\rho \neq p$ を検討する．帰無仮説 $\rho = p$ を立てる．検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

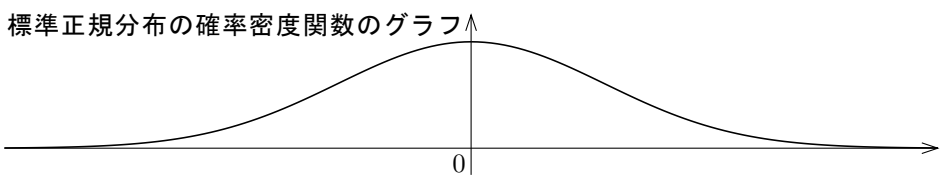
検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので，



仮説 $\rho \neq p$ を検討する．帰無仮説 $\rho = p$ を立てる．検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので， Q の値が 0 ほど，つまり， Q の値の絶対値が ほど，確率的に不自然なので，帰無仮説 $\rho = p$ は疑わしい．



仮説 $\rho \neq p$ を検討する．帰無仮説 $\rho = p$ を立てる．検定統計量

$Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

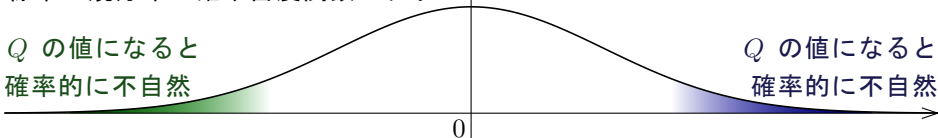
検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので， Q の値が 0 から離れるほど，つまり， Q の値の絶対値が大きいほど，確率的に不自然なので，帰無仮説 $\rho = p$ は疑わしい．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

Q の値になると
確率的に不自然

Q の値になると
確率的に不自然

0



仮説 $\rho \neq p$ を検討する．帰無仮説 $\rho = p$ を立てる．検定統計量

$Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので， Q の値が 0 から離れるほど，つまり， Q の値の絶対値が大きいほど，確率的に不自然なので，帰無仮説 $\rho = p$ は疑わしい．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

Q の値になると
確率的に不自然

Q の値になると
確率的に不自然

そこで Q の実現値の絶対値がある基準の値以上のとき帰無仮説を棄却する．

仮説 $\rho \neq p$ を検討する．帰無仮説 $\rho = p$ を立てる．検定統計量

$Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p) = Q .$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので， Q の値が 0 から離れるほど，つまり， Q の値の絶対値が大きいほど，確率的に不自然なので，帰無仮説 $\rho = p$ は疑わしい．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

Q の値になると
確率的に不自然

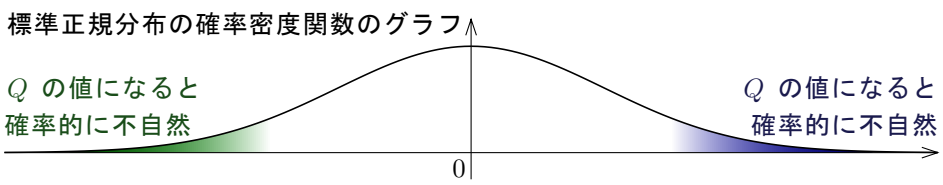
Q の値になると
確率的に不自然

そこで Q の実現値の絶対値がある基準の値以上のとき帰無仮説を棄却する．
このように，数直線上で帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左右両側にあるとき，両側検定という．

帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|)$$

帰無仮説 $\rho = p$ より $Q = Z$.



帰無仮説 $\rho = p$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) .$$

任意の実数 a, b について

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b .$$

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



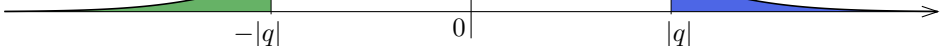
帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

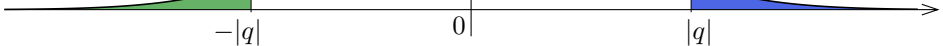
帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

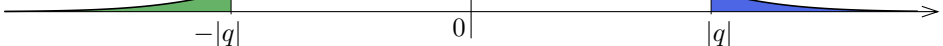
帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

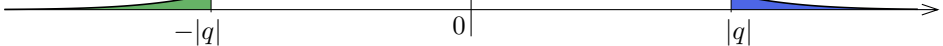
帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

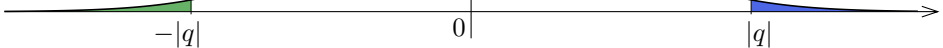
帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、

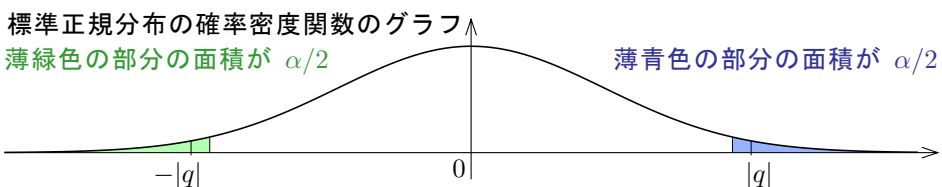
標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

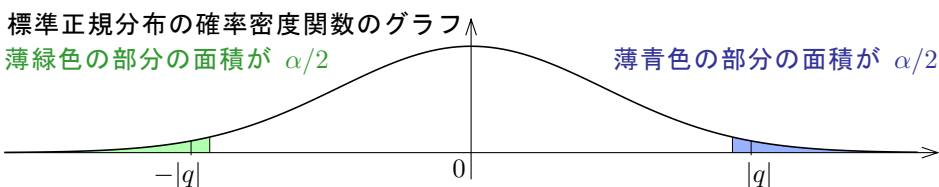
Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；



帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(|Z| \geq |q|)$ が有意水準 α より とき、甚だ不自然と想着て、帰無仮説を棄却する。

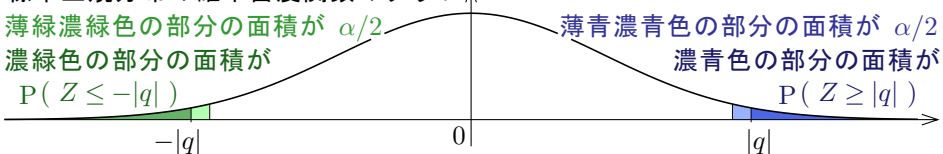


帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\rho = p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(|Z| \geq |q|)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\rho = p$ の下で，両側 Z 検定において，実数 q に対する p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq |q|) &= P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) \\ &= 2P(Z \geq |q|) . \end{aligned}$$

帰無仮説 $\rho = p$ の下で，両側 Z 検定において，実数 q に対する p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq |q|) &= P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) \\ &= 2P(Z \geq |q|) . \end{aligned}$$

結局，有意水準 α の両側 Z 検定で，検定統計量 Q の実現値 q について $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|) < \alpha$ のときに限り，帰無仮説 $\rho = p$ が棄却されて対立仮説 $\rho \neq p$ がいえる。

補助定理を用意する.

[補助定理] 実数 r について $0 \leq r \leq 1$ とする. 区間 $(0,1)$ を定義域とする関数 ϕ を $\phi(x) = \frac{r-x}{\sqrt{x(1-x)}}$ と定める. この関数 ϕ は単調減少である.

証明 実数 x について $0 < x < 1$ とする.

$$\phi'(x) = \frac{2rx - r - x}{2x(1-x)\sqrt{x(1-x)}} .$$

$0 \leq r \leq 1$ かつ $0 < x < 1$ なので, $-1 \leq 2r-1 \leq 1$ かつ $-1 < 2x-1 < 1$,
 $(2r-1)(2x-1) < 1$, よって $2rx - r - x = \frac{(2r-1)(2x-1) - 1}{2} < 0$.

$\phi'(x) < 0$ なので, ψ は単調減少である.

証明終了

仮説 $\rho > p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を立てる.

仮説 $\rho > p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \geq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$
$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

仮説 $\rho > p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \geq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので,

$$E[Q] \quad E[Z] = \quad .$$

仮説 $\rho > p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \geq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので,

$$E[Q] \leq E[Z] = 0 .$$

仮説 $\rho > p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を立てる. 補助定理により,

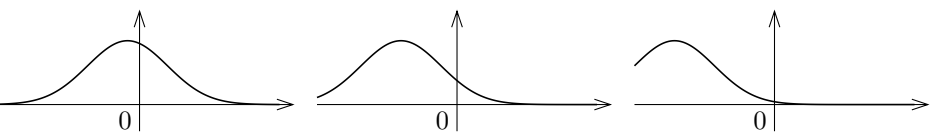
$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \geq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

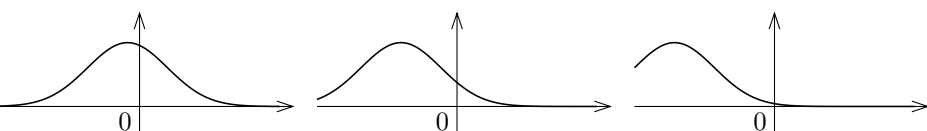
確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \leq E[Z] = 0 .$$

Q の平均値が 0 以下なので, Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる.

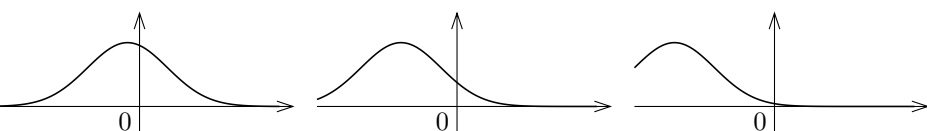


Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。

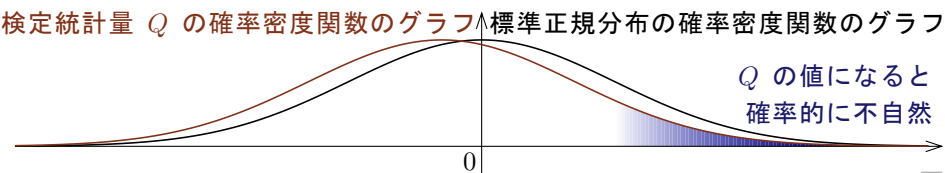


Q の平均値が 0 よりどれくらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいく
ら ても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より
ほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\rho \leq p$ は疑わしい。

Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



Q の平均値が 0 よりどれくらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいくらか小さくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\rho \leq p$ は疑わしい。



帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

$$Z \geq q \text{ ならば } Q \geq q,$$

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q,$$

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である．帰無仮説より $Z \geq Q$ なので，

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

$$P(Q \geq q) = P(Z \geq q) .$$

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

$$P(Q \geq q) \leq P(Z \geq q) .$$

事象 A と B について、“ A ならば B ” であるとき、 A の範囲は B の範囲に含まれるので、“ $P(A) \leq P(B)$ ” である。

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

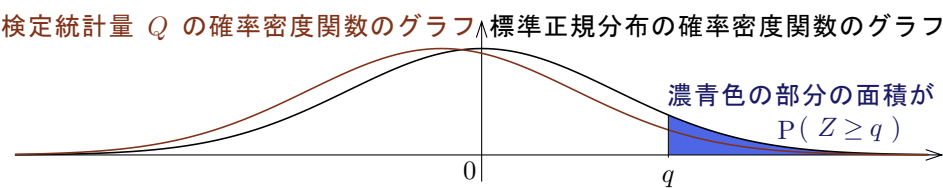
$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

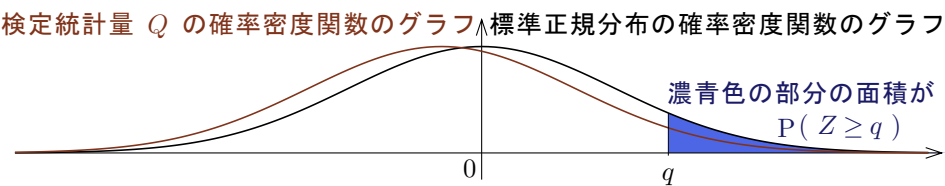
$$P(Q \geq q) \leq P(Z \geq q) .$$

帰無仮説の下で検定統計量 Q の値が q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。

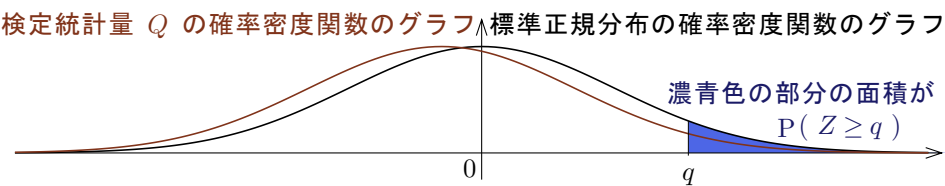
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。



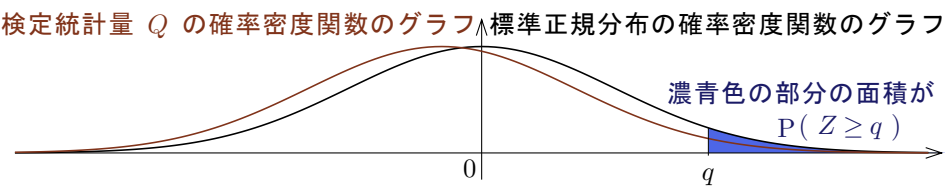
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



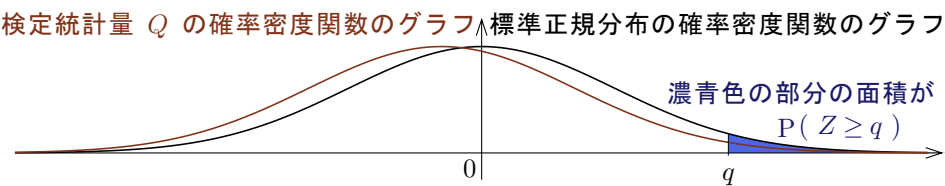
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



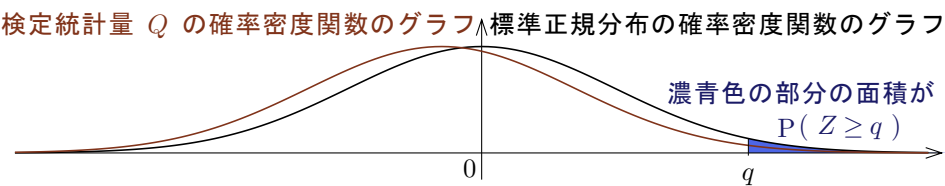
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



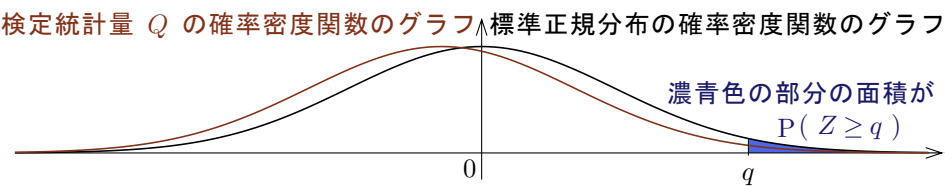
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



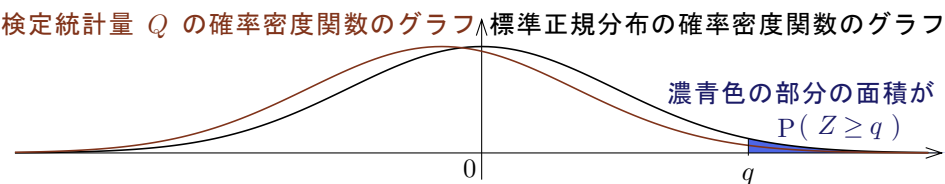
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



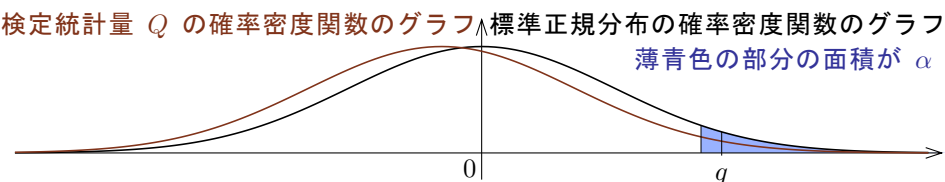
帰無仮説 $\rho \leq \rho$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．



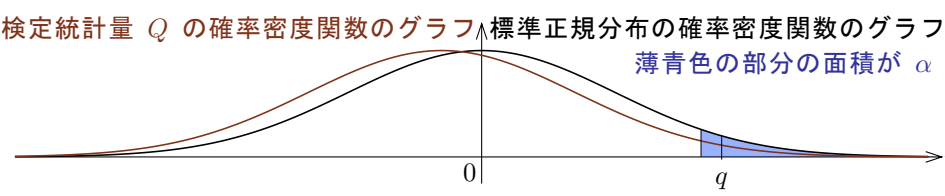
帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。 帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、



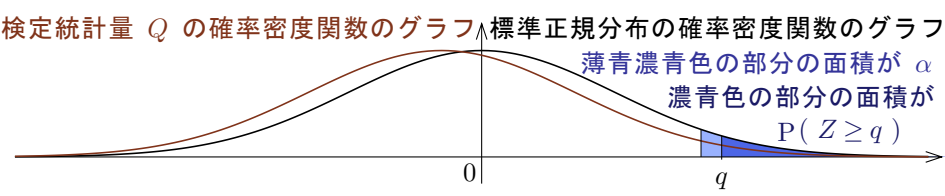
帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として，この p 値を有意水準 α と比べる；



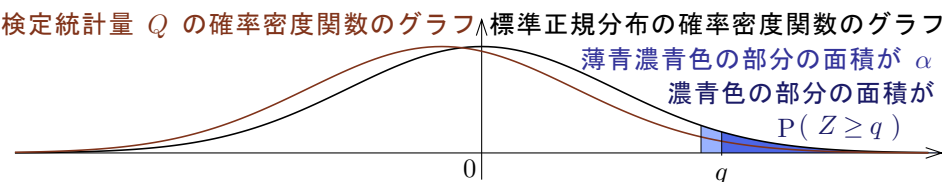
帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として，この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より とき，甚だ不自然と考えると，帰無仮説を棄却する．



帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として，この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき，甚だ不自然と考えて，帰無仮説を棄却する．



帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \leq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として，この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき，甚だ不自然と考えて，帰無仮説を棄却する．



結局，有意水準 α の右側 Z 検定で，検定統計量 Q の実現値 q について $P(Z \geq q) < \alpha$ のときに限り，帰無仮説 $\rho \leq p$ が棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる．

次の補助定理を述べた.

[補助定理] 実数 r について $0 \leq r \leq 1$ とする. 区間 $(0,1)$ を定義域とする関数 ϕ を $\phi(x) = \frac{r-x}{\sqrt{x(1-x)}}$ と定めると, ϕ は単調減少である.

仮説 $\rho < p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \geq p$ を立てる.

仮説 $\rho < p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \geq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \leq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$
$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

仮説 $\rho < p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \geq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \leq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \quad E[Z] = \quad .$$

仮説 $\rho < p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \geq p$ を立てる. 補助定理により,

$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \leq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので,

$$E[Q] \geq E[Z] = 0 .$$

仮説 $\rho < p$ を検討する. 帰無仮説 $\rho \geq p$ を立てる. 補助定理により,

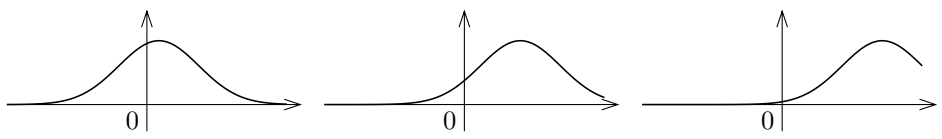
$$\frac{R - \rho}{\sqrt{\rho(1 - \rho)}} \leq \frac{R - p}{\sqrt{p(1 - p)}} ,$$

$$Z = \sqrt{\frac{n}{\rho(1 - \rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{n}{p(1 - p)}}(R - p) = Q .$$

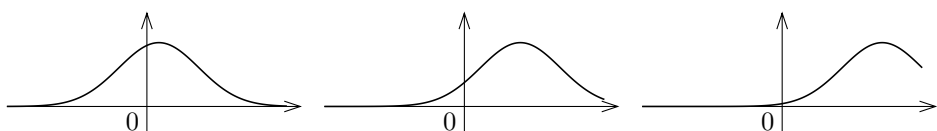
確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従うので,

$$E[Q] \geq E[Z] = 0 .$$

Q の平均値が 0 以上なので, Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる.

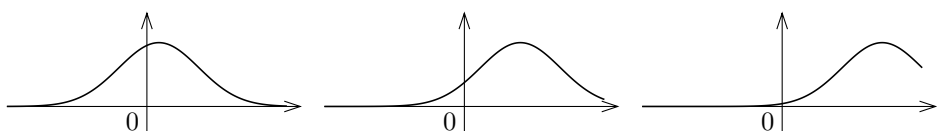


Q の平均値が 0 以上なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



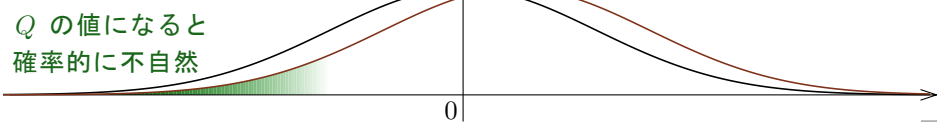
Q の平均値が 0 よりどれくらい大きいか不明なので、 Q の値が 0 よりいく
ても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より
ほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\rho \geq p$ は疑わしい。

Q の平均値が 0 以上なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



Q の平均値が 0 よりどれくらい大きいか不明なので、 Q の値が 0 よりいく
ら大きくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より小さい
ほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\rho \geq p$ は疑わしい。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ 検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

$$\leq q \text{ ならば } \leq q ,$$

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である．帰無仮説より $Z \leq Q$ なので，

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

$$P(Q \leq q) = P(Z \leq q) .$$

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

$$P(Q \leq q) \leq P(Z \leq q) .$$

事象 A と B について、“ A ならば B ” であるとき、 A の範囲は B の範囲に含まれるので、“ $P(A) \leq P(B)$ ” である。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

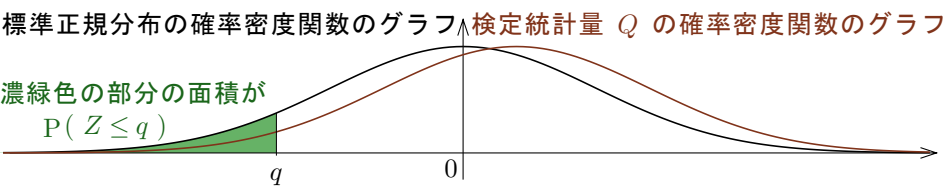
$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

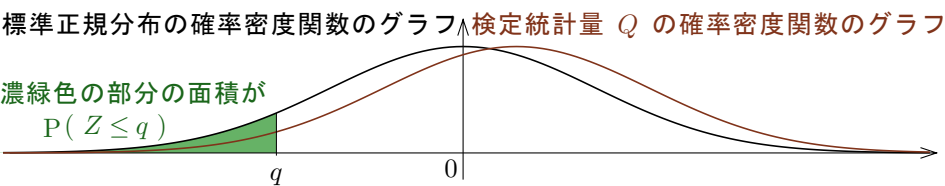
$$P(Q \leq q) \leq P(Z \leq q) .$$

帰無仮説の下で検定統計量 Q の値が q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。

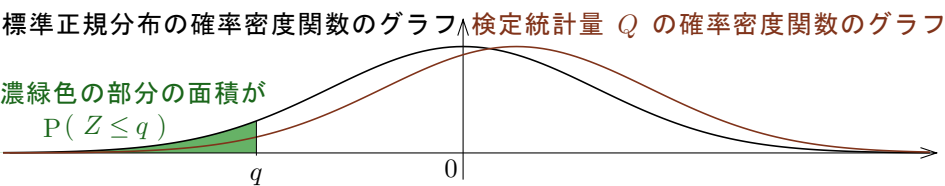
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である．



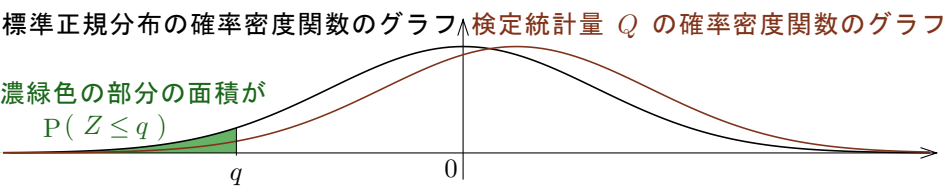
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



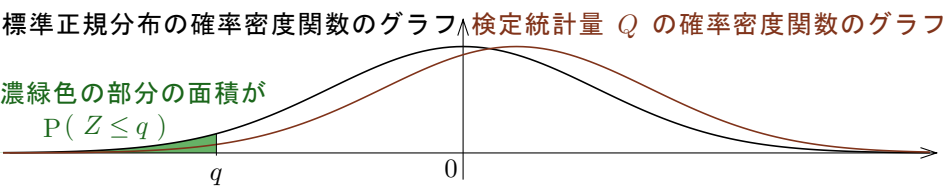
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



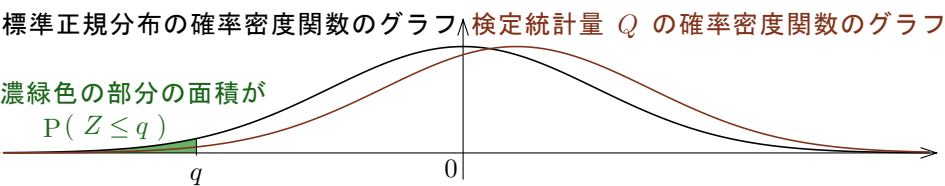
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



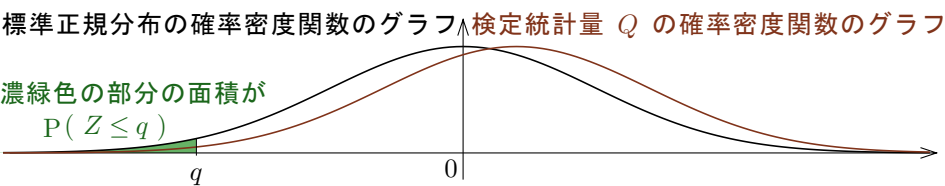
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



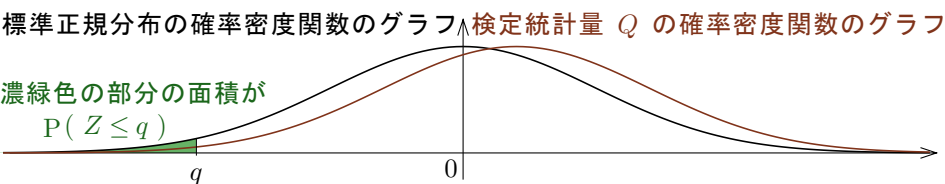
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



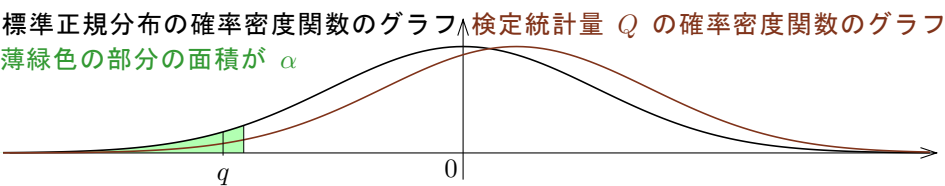
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である.



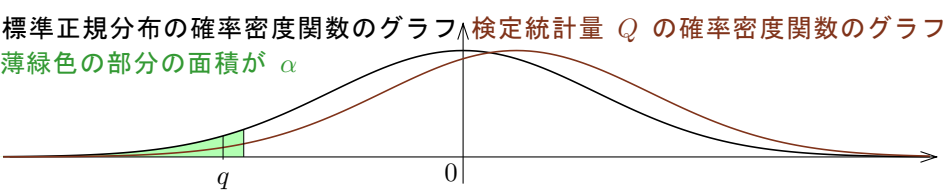
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である. 帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、



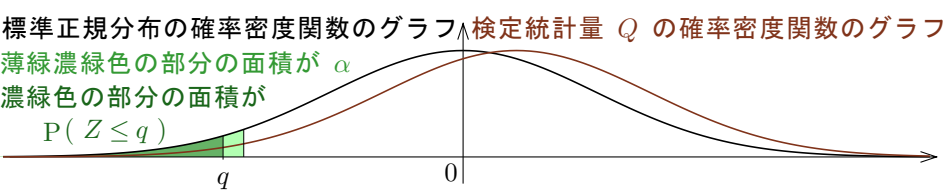
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。 帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値 $P(Z \geq q)$ を有意水準 α と比べる；



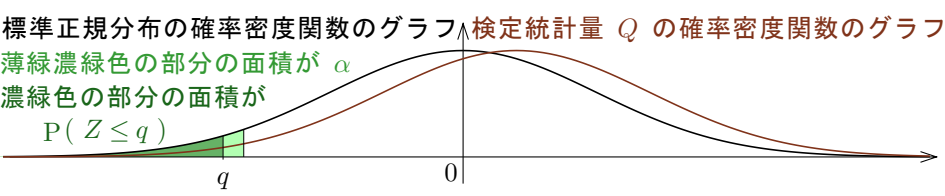
帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として，この p 値 $P(Z \leq q)$ を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より小さいとき，甚だ不自然と考えて，帰無仮説を棄却する．



帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として，この p 値 $P(Z \leq q)$ を有意水準 α と比べる；p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より小さいとき，甚だ不自然と考えて，帰無仮説を棄却する．



帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\rho \geq p$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値 $P(Z \leq q)$ を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。



結局、有意水準 α の左側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(Z \leq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\rho \geq p$ が棄却されて対立仮説 $\rho < p$ がいえる。

右側検定と左側検定とを併せて片側検定という.

[公式 8.3] 無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p に対して, 仮説 $\rho \neq p$ 或いは $\rho > p$ 或いは $\rho < p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めると次のようになる.

[公式 8.3] 無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p に対して, 仮説 $\rho \neq p$ 或いは $\rho > p$ 或いは $\rho < p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めると次のようになる.

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2 P(Z \geq |q|)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho = p$ が棄却されて対立仮説 $\rho \neq p$ がいえる.

[公式 8.3] 無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p に対して, 仮説 $\rho \neq p$ 或いは $\rho > p$ 或いは $\rho < p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めると次のようになる.

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho = p$ が棄却されて対立仮説 $\rho \neq p$ がいえる.

(2) 有意水準 α の右側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \geq q)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho \leq p$ が棄却されて対立仮説 $\rho > p$ がいえる.

[公式 8.3] 無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p に対して, 仮説 $\rho \neq p$ 或いは $\rho > p$ 或いは $\rho < p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めると次のようになる.

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho = p$ が棄却されて対立仮説 $\rho \neq p$ がいえる.

(2) 有意水準 α の右側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \geq q)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho \leq p$ が棄却されて対立仮説 $\rho > p$ がいえる.

(3) 有意水準 α の左側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \leq q)$ が α より小さいとき, 帰無仮説 $\rho \geq p$ が棄却されて対立仮説 $\rho < p$ がいえる.

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく.

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた.

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない;

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした;

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした; $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\rho = p$ のときなので, p 値を求めるには $\rho = p$ のときを考えればよいことになる.

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした; $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\rho = p$ のときなので, p 値を求めるには $\rho = p$ のときを考えればよいことになる. それ故, 対立仮説 $\rho > p$ を検討するには帰無仮説として $\rho = p$ を仮定して p 値を求めることが多い.

無限 2 項母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本比率を表す確率変数を R とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 未知の母比率 ρ 及び与えられた実数 p について仮説 $\rho > p$ を検討するとき, 検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}(R-p)$ と定めた. 帰無仮説 $\rho \leq p$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした; $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\rho = p$ のときなので, p 値を求めるには $\rho = p$ のときを考えればよいことになる. それ故, 対立仮説 $\rho > p$ を検討するには帰無仮説として $\rho = p$ を仮定して p 値を求めることが多い. 同様の理由で, 対立仮説 $\rho < p$ を検討するには帰無仮説として $\rho = p$ を仮定して p 値を求めることが多い.

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった。母比率は 70% より大きいといえるか、 p 値を求めて有意水準 1% で検定する。

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった。母比率は 70% より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \right)$ に従うとする。

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった。母比率は 70% より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする。

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった. 母比率は 70% より大きいといえるか, p 値を求めて有意水準 1% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2000}}} =$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった。母比率は 70% より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2000}}} = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった. 母比率は 70% より大きいといえるか, p 値を求めて有意水準 1% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2000}}} = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. $\rho > 0.7$ といえるか考えるので, 帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ を立てる.

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった。母比率は 70% より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2000}}} = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\rho > 0.7$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q =$$

例 大きさの約 50 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 2000 のある標本において該当する要素の個数は 1448 であった. 母比率は 70% より大きいといえるか, p 値を求めて有意水準 1% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{2000}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{2000}}} = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. $\rho > 0.7$ といえるか考えるので, 帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ を立てる. 検定統計量 Q を次のように定める:

$$Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \quad \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R-0.7) = Q \ .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R-0.7) = Q \ .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が
ほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい.

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって 側検定を行う.

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う.

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の

実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の

実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, ≥ 2.3422 ならば ≥ 2.3422 ,

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の

実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 2.3422$ ならば $Z \geq 2.3422$,

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の

実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 2.3422$ ならば $Z \geq 2.3422$, よって

$$P(Q \geq 2.3422) \quad P(Z \geq 2.3422) .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 2.3422$ ならば $Z \geq 2.3422$, よって

$$P(Q \geq 2.3422) \leq P(Z \geq 2.3422) .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{2000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は疑わしい. よって右側検定を行う. R の

実現値が $\frac{1448}{2000}$ なので, $Q = \sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}(R - 0.7)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{2000}{0.7(1-0.7)}}\left(\frac{1448}{2000} - 0.7\right) \doteq 2.3422 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 2.3422$ ならば $Z \geq 2.3422$, よって

$$P(Q \geq 2.3422) \leq P(Z \geq 2.3422) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 2.3422 以上に不自然な範囲に入る確率

$P(Q \geq 2.3422)$ は最大 $P(Z \geq 2.3422)$ である. この p 値 $P(Z \geq 2.3422)$ が有意水準 1% より小さいときに限り, 帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する.

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2.3422) &= 1 - P(Z \leq 2.3422) = 1 - \Phi(2.3422) \doteq 1 - 0.9904 \\ &= 0.0096 . \end{aligned}$$

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2.3422) &= 1 - P(Z \leq 2.3422) = 1 - \Phi(2.3422) \doteq 1 - 0.9904 \\ &= 0.0096. \end{aligned}$$

$P(Z \geq 2.3422) < 0.01$ なので, 帰無仮説 $\rho \leq 0.7$ は棄却される. 故に, 有意水準 1% の右側 Z 検定で, 母比率が 0.7 より大きいといえる. 終

問8.3.1 ある新聞社が行った内閣支持率の調査の結果では 3000 人から回答が得られた。この 3000 人の回答者を、有権者全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。標本調査の結果、内閣を指示すると回答した人の人数は 1842 人であった。有権者全体において内閣支持率は 60% より大きいといえるか、有意水準 5% で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 5 桁まで求めること。推論の過程を述べること。

母比率を ρ とおく。標本比率を表す確率変数を R とおく。標本の大きさは充分大きいので、 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{3000}\right)$ に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{3000}}} = \sqrt{\frac{3000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{3000}{0.6(1-0.6)}}(R - 0.6) .$$

帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ より、

$$Z = \sqrt{\frac{3000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \geq \sqrt{\frac{3000}{0.6(1-0.6)}}(R - 0.6) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので、 $E[Q] \leq E[Z] = 0$. Q の値が 0 より大きいほど帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ は疑わしい。よって右側検定を行う。 R の実現値が $\frac{1842}{3000}$ なので、 Q の実現値は

$$\sqrt{\frac{3000}{0.6(1-0.6)}}\left(\frac{1842}{3000} - 0.6\right) \doteq 1.56525 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、 $Q \geq 1.56525$ ならば $Z \geq 1.56525$, よって

$$P(Q \geq 1.56525) \leq P(Z \geq 1.56525) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 1.56525 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 1.56525)$ は最大 $P(Z \geq 1.56525)$ である。この p 値 $P(Z \geq 1.56525)$ が有意水準 1% より小さいときに限り、帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく。p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1.56525) &= 1 - P(Z \leq 1.56525) = 1 - \Phi(1.56525) \doteq 1 - 0.94124 \\ &= 0.05876 . \end{aligned}$$

$P(Z \geq 1.56525) \not\leq 0.05$ なので、帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ は棄却されない。故に、有意水準 1% の右側 Z 検定で、内閣支持率は 60% より大きいといえない。 —

母比率を ρ とおく。標本比率を表す確率変数を R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{3000}\right)$ に従うとする。確率変数 $Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{3000}}} = \sqrt{\frac{3000}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ を立てる。検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{3000}{0.6(1-0.6)}}(R - 0.6)$ と定める。帰無仮説より $Q \leq Z$ なので、 Q の値が大きいほど確率的に不自然である。 Q の値が実現値 $\sqrt{\frac{3000}{0.6(1-0.6)}}\left(\frac{1842}{3000} - 0.6\right) \doteq 1.56525$ 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 1.56525)$ は最大で $P(Z \geq 1.56525) = 0.05876$ なので、 p 値は 0.05876 である。故に、帰無仮説 $\rho \leq 0.6$ は棄却されない。有意水準 1% の右側 Z 検定で、内閣支持率は 60% より大きいといえない。

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった。母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で検定する。

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった。母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \right)$ に従うとする。

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった。母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{200}\right)$ に従うとする。

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった. 母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか, p 値を求めて有意水準 5% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{200}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{200}}} =$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった. 母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか, p 値を求めて有意水準 5% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{200}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する。母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった。母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母比率を ρ とおく。標本の大きさは充分大きいので、標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{200}\right)$ に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\rho < 0.25$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q =$$

例 大きさの約 60 万の 2 項母集団の中である条件に該当するものの割合について推定する. 母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において該当する要素の個数は 40 であった. 母集団の中で該当するものの比率は 25% より小さいといえるか, p 値を求めて有意水準 5% で検定する.

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える. 母比率を ρ とおく. 標本の大きさは充分大きいので, 標本の比率を表す確率変数 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{200}\right)$ に従うとする. R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. $\rho < 0.25$ といえるか考えるので, 帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ を立てる. 検定統計量 Q を次のように定める:

$$Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R - 0.25) .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \quad \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q \ .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q \ .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R - 0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が
ほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい.

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって 側検定を行う.

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R - 0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う.

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, ≤ -1.6323 ならば ≤ -1.6323 , よって

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -1.6323$ ならば $Z \leq -1.6323$, よって

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -1.6323$ ならば $Z \leq -1.6323$, よって

$$P(Q \leq -1.6323) \quad P(Z \leq -1.6323) .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -1.6323$ ならば $Z \leq -1.6323$, よって

$$P(Q \leq -1.6323) \leq P(Z \leq -1.6323) .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho) \leq \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので, $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は疑わしい. よって左側検定を行う. 検定

統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}(R-0.25)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{0.25(1-0.25)}}\left(\frac{40}{200}-0.25\right) \doteq -1.6323 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -1.6323$ ならば $Z \leq -1.6323$, よって

$$P(Q \leq -1.6323) \leq P(Z \leq -1.6323) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 -1.6323 以上に不自然な範囲に入る

確率 $P(Q \leq -1.6323)$ は最大で $P(Z \leq -1.6323)$ である. この p 値

$P(Z \leq -1.6323)$ が有意水準 5% より小さいときに限り, 帰無仮説 $\rho \geq 0.25$

は大変疑わしいと考えてこれを棄却する.

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1.6323) &= \Phi(-1.6323) = 1 - \Phi(1.6323) \doteq 1 - 0.9488 \\ &= 0.0512 . \end{aligned}$$

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \leq -1.6323) &= \Phi(-1.6323) = 1 - \Phi(1.6323) \doteq 1 - 0.9488 \\ &= 0.0512 . \end{aligned}$$

$P(Z \leq -1.6323) \not\leq 0.05$ なので, 帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は棄却されない. 故に, 有意水準 5% の左側 Z 検定で, 母比率が 0.25 より小さいといえない. 終

問8.3.2 ある製菓工場で作られる煎餅は製造工程で一部が割れる。この製菓工場で原料の米の種類を変えて試しに 500 枚の煎餅を作った。こうして作られた 500 枚の煎餅を、この工場で米の種類を変えて作った場合の煎餅の全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、割れた煎餅の枚数は 17 枚であった。この工場で米の種類を変えて煎餅を作った場合にその中で割れた煎餅の割合は 6% より小さいといえるか、有意水準 1% で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 5 桁まで求めること。推論の過程を述べること。

母比率を ρ とおく。標本比率を表す確率変数を R とおく。標本の大きさは充分大きいので、 R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{500}\right)$ に従うとする。 R を標準化した確率変数

$$Z = \frac{R - \rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{500}}} = \sqrt{\frac{500}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。帰無仮説 $\rho \geq 0.06$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{500}{0.06(1-0.06)}}(R - 0.06) .$$

帰無仮説 $\rho \geq 0.06$ より、

$$Z = \sqrt{\frac{500}{\rho(1-\rho)}}(R - \rho) \leq \sqrt{\frac{500}{0.06(1-0.06)}}(R - 0.06) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので、 $E[Q] \geq E[Z] = 0$. Q の値が 0 より小さいほど帰無仮説 $\rho \geq 0.06$ は疑わしい。よって左側検定を行う。 Q の実現値は

$$\sqrt{\frac{500}{0.06(1-0.06)}}\left(\frac{17}{500} - 0.25\right) \doteq -2.44804 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、 $Q \leq -2.44804$ ならば $Z \leq -2.44804$, よって

$$P(Q \leq -2.44804) \leq P(Z \leq -2.44804) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 -2.44804 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq -2.44804)$ は最大で $P(Z \leq -2.44804)$ である。この p 値 $P(Z \leq -2.44804)$ が有意水準 1% より小さいときに限り、帰無仮説 $\rho \geq 0.06$ は大変疑わしいと考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく。 p 値は

$$P(Z \leq -2.44804) = \Phi(-2.44804) \doteq 0.00718 .$$

$P(Z \leq -2.44804) < 0.01$ なので、帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は棄却される。故に、有意水準 1% の左側 Z 検定で、割れた煎餅の割合は 6% より小さいといえる。

母比率を ρ とおく．標本比率を表す確率変数を R は正規分布 $N\left(\rho, \frac{\rho(1-\rho)}{500}\right)$ に従うとする．確率変数 $Z = \frac{R-\rho}{\sqrt{\frac{\rho(1-\rho)}{500}}} = \sqrt{\frac{500}{\rho(1-\rho)}}(R-\rho)$ は標準正規分布に従う．帰無仮説 $\rho \geq 0.06$ を立てる．検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{500}{0.06(1-0.06)}}(R-0.06)$ と定める．帰無仮説より $Q \geq Z$ なので， Q の値が小さいほど確率的に不自然である． Q の値が実現値 $\sqrt{\frac{500}{0.06(1-0.06)}}\left(\frac{17}{500}-0.25\right) \doteq -2.44804$ 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq -2.44804)$ は最大で $P(Z \leq -2.44804) \doteq 0.00718$ なので，p 値は 0.00718 である．故に，帰無仮説 $\rho \geq 0.25$ は棄却される．有意水準 1% の左側 Z 検定で，割れた煎餅の割合は 6% より小さいといえる．