

8.2 大標本による母平均の検定

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする.

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.3 により、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

[定理 5.3] 母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとき、標本平均を表す確率変数は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.3 により、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。標本調査では母分散 σ^2 の値は通常は分からない。標本の大きさ n が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は母分散 σ^2 を標本の不偏分散 u で代替する。

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.3 により、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。標本調査では母分散 σ^2 の値は通常は分からない。標本の大きさ n が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は母分散 σ^2 を標本の不偏分散 u で代替する。標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることにあまり意味がないので、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{u}{n}\right)$ に従うとして確率を考える。

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.3 により、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。標本調査では母分散 σ^2 の値は通常は分からない。標本の大きさ n が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は母分散 σ^2 を標本の不偏分散 u で代替する。標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることによりあまり意味がないので、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{u}{n}\right)$ に従うとして確率を考える。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{u}{n}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

母平均が μ であり母標準偏差が σ である無限母集団から無作為抽出された標本の大きさ n が充分大きいとする。定理 5.3 により、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。標本調査では母分散 σ^2 の値は通常は分からない。標本の大きさ n が充分に大きいので、標本の不偏分散が母分散とほぼ一致すると考えて、通常は母分散 σ^2 を標本の不偏分散 u で代替する。標本調査では数学的根拠において確率が厳密な値か近似値かに拘ることによりあまり意味がないので、標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{u}{n}\right)$ に従うとして確率を考える。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{u}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。標準正規分布を用いる仮説検定を Z 検定という。

与えられた実数 m に対して，仮説 $\mu \neq m$ 及び仮説 $\mu > m$ 及び仮説 $\mu < m$ を検討する．

与えられた実数 m に対して，仮説 $\mu \neq m$ 及び仮説 $\mu > m$ 及び仮説 $\mu < m$ を検討する．標本平均を表す確率変数 $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．

与えられた実数 m に対して、仮説 $\mu \neq m$ 及び仮説 $\mu > m$ 及び仮説 $\mu < m$ を検討する。標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。母平均 μ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。

与えられた実数 m に対して、仮説 $\mu \neq m$ 及び仮説 $\mu > m$ 及び仮説 $\mu < m$ を検討する。標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。母平均 μ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 μ を与えられた実数 m で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$$

を検定統計量とする。

確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は、標準正規分布に従うので確率を計算できるが、実現値を計算できない。確率変数 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ は、標本調査の結果により実現値を計算できるが、確率を計算できない。

与えられた実数 m に対して、仮説 $\mu \neq m$ 及び仮説 $\mu > m$ 及び仮説 $\mu < m$ を検討する。標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。母平均 μ は分からないので、 $Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu)$ は実現値を計算できないので検定統計量にできない。そこで、 μ を与えられた実数 m で置き換えた確率変数

$$Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$$

を検定統計量とする。0 に近い正の実数 α を有意水準とする。

仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる.

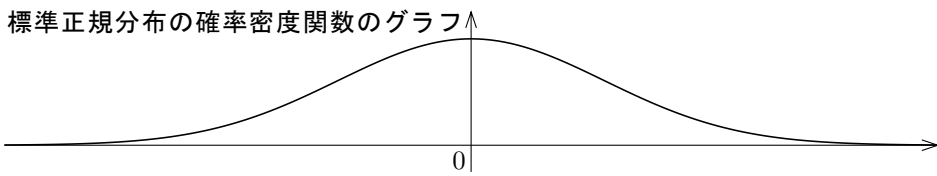
仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m) = Q .$$

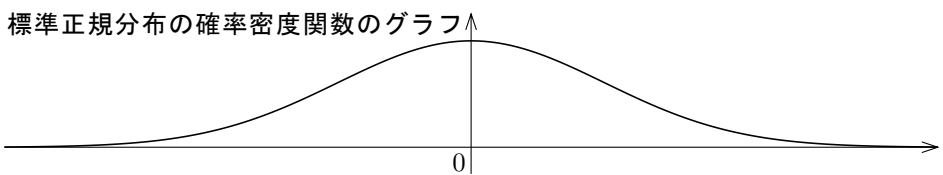
検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,



仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, Q の値が 0 ほど, つまり, Q の値の絶対値が ほど, 確率的に不自然なので, 帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしい.

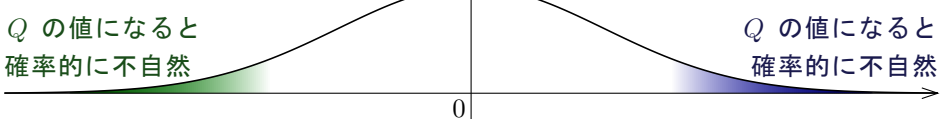


仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m) = Q.$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, Q の値が 0 から離れるほど, つまり, Q の値の絶対値が大きいほど, 確率的に不自然なので, 帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしい.

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

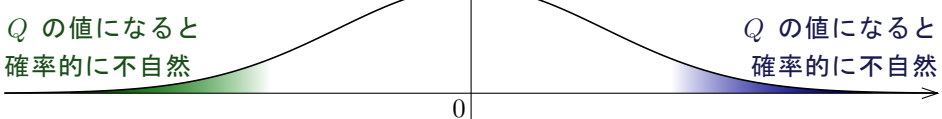


仮説 $\mu \neq m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu = m$ を立てる. 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ について,

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m) = Q.$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので, Q の値が 0 から離れるほど, つまり, Q の値の絶対値が大きいほど, 確率的に不自然なので, 帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしい.

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



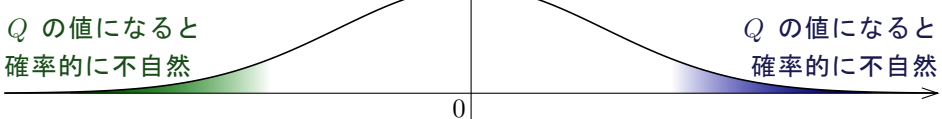
そこで Q の実現値の絶対値がある実数より大きいとき帰無仮説を棄却する.

仮説 $\mu \neq m$ を検討する．帰無仮説 $\mu = m$ を立てる．検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ について，

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m) = Q .$$

検定統計量 Q は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので， Q の値が 0 から離れるほど，つまり， Q の値の絶対値が大きいほど，確率的に不自然なので，帰無仮説 $\mu = m$ は疑わしい．

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



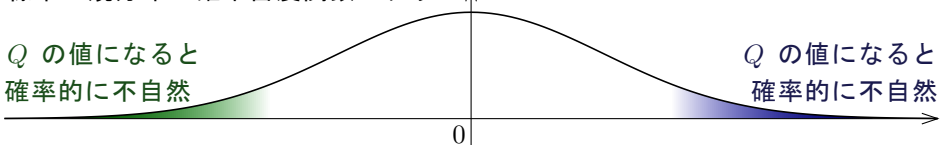
そこで Q の実現値の絶対値がある実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．
このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左右両側にあるとき，両側検定という．

帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|)$$

帰無仮説 $\mu = m$ より $Q = Z$.

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) .$$

任意の実数 a, b について

$$|a| \geq b \iff a \geq b \text{ または } a \leq -b .$$

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



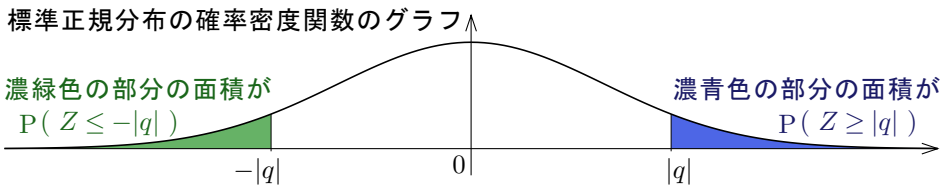
帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

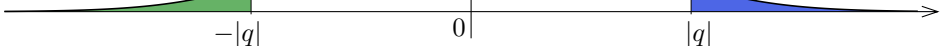
帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) .$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

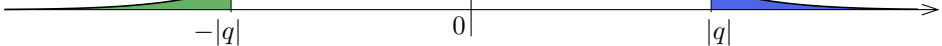
帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) .$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

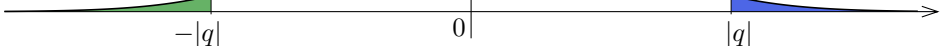
帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

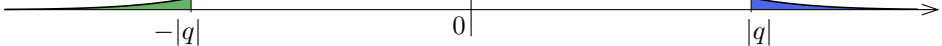
帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) .$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が

標準正規分布の確率密度関数のグラフ

濃緑色の部分の面積が
 $P(Z \leq -|q|)$



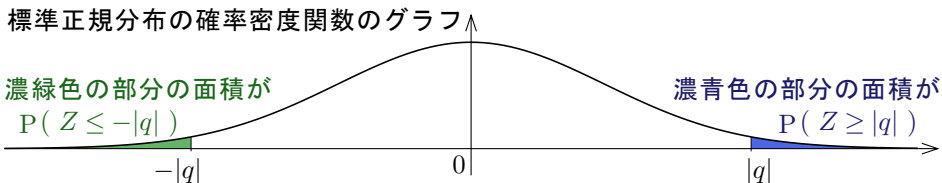
濃青色の部分の面積が
 $P(Z \geq |q|)$

帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である．

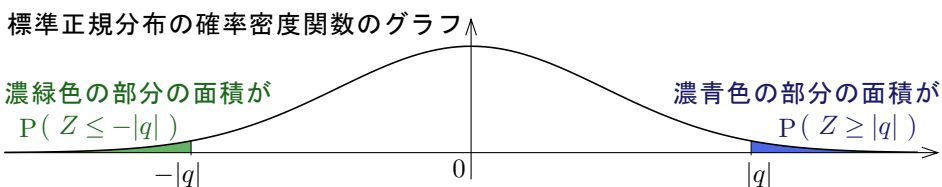
標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

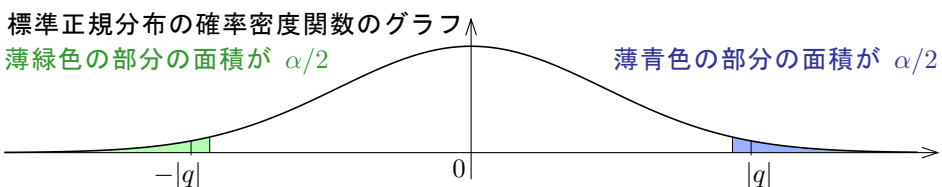
Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、



帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

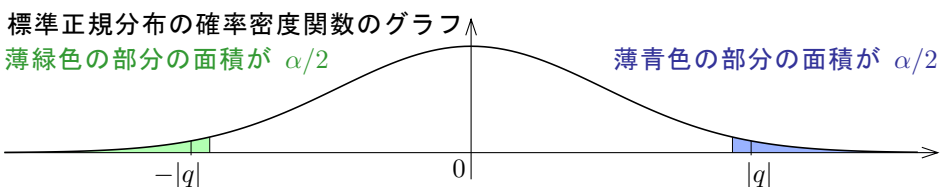
Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として，この p 値を有意水準 α と比べる；



帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(|Z| \geq |q|)$ が有意水準 α より とき、甚だ不自然と想着て、帰無仮説を棄却する。

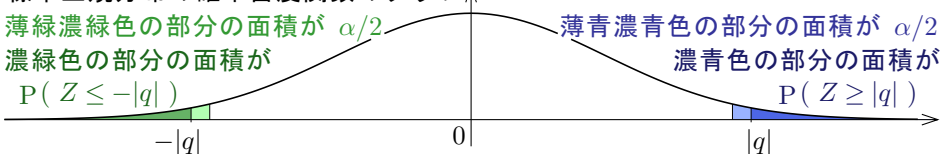


帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq |q|) = P(|Z| \geq |q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|).$$

Q の値 q についてこの確率が小さいほど $|q|$ が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu = m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(|Z| \geq |q|)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(|Z| \geq |q|)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ



帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対して，p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq |q|) &= P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) \\ &= 2P(Z \geq |q|) . \end{aligned}$$

帰無仮説 $\mu = m$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対して，p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq |q|) &= P(Z \geq |q|) + P(Z \leq -|q|) = P(Z \geq |q|) + P(Z \geq |q|) \\ &= 2P(Z \geq |q|) . \end{aligned}$$

結局，有意水準 α の両側 Z 検定で，検定統計量 Q の実現値 q について $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|) < \alpha$ のときに限り，帰無仮説 $\mu = m$ が棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる。

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \quad -m$,

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \quad \overline{X} - m$,

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \quad \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \quad E[Z] = \quad .$$

仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \leq E[Z] = 0 .$$

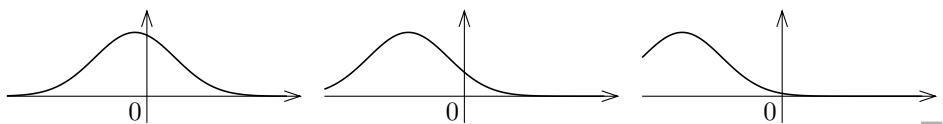
仮説 $\mu > m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を立てる. $-\mu \geq -m$,
 $\overline{X} - \mu \geq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

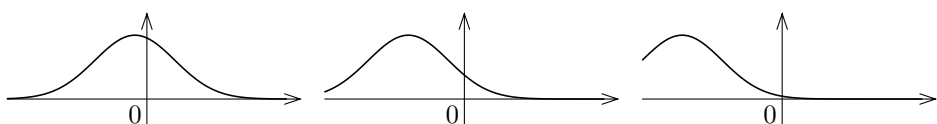
確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \leq E[Z] = 0.$$

Q の平均値が 0 以下なので, Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる.

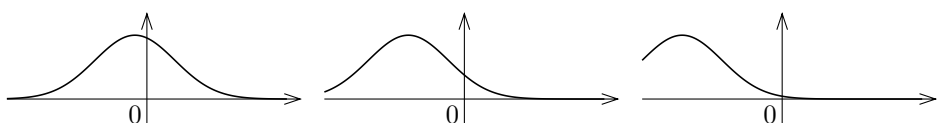


Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



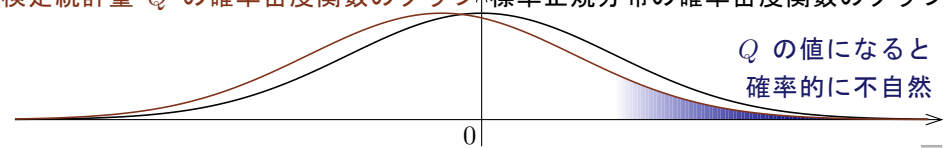
Q の平均値が 0 よりどれくらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいく
ても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より
ほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \leq m$ は疑わしい。

Q の平均値が 0 以下なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



Q の平均値が 0 よりどれくらい小さいか不明なので、 Q の値が 0 よりいくらか小さくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \leq m$ は疑わしい。

検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ



Q の値になると
確率的に不自然

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である．帰無仮説より $Z \geq Q$ なので，

$$Z \geq q \text{ ならば } Q \geq q ,$$

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q,$$

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき，右側検定という．

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である．帰無仮説より $Z \geq Q$ なので，

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

$$P(Q \geq q) = P(Z \geq q) .$$

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

$$P(Q \geq q) \leq P(Z \geq q) .$$

事象 A と B について、“ A ならば B ” であるとき、 A の範囲は B の範囲に含まれるので、“ $P(A) \leq P(B)$ ” である。

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある正の実数より大きいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の右側だけあるとき、右側検定という。

帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が大きいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \geq q)$ である。帰無仮説より $Z \geq Q$ なので、

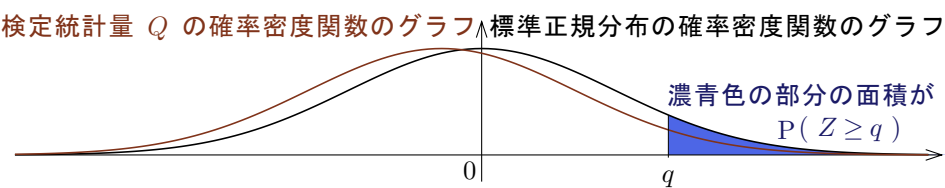
$$Q \geq q \text{ ならば } Z \geq q ,$$

よって

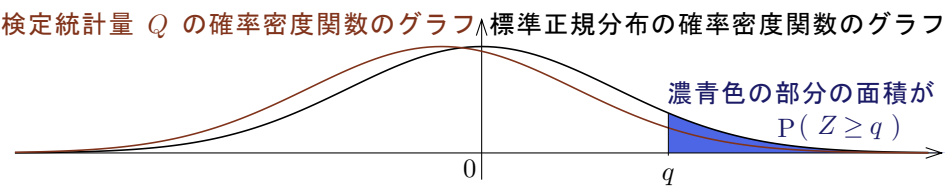
$$P(Q \geq q) \leq P(Z \geq q) .$$

帰無仮説の下で検定統計量 Q の値が q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。

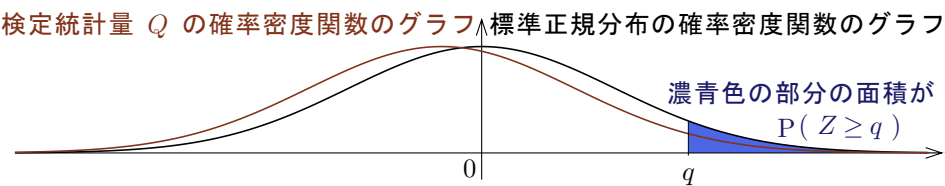
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である．



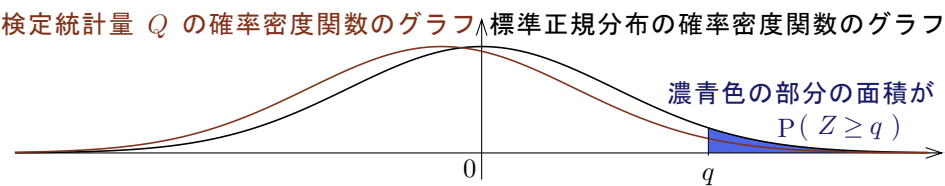
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



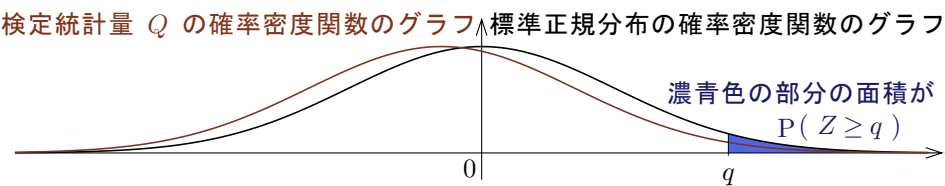
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



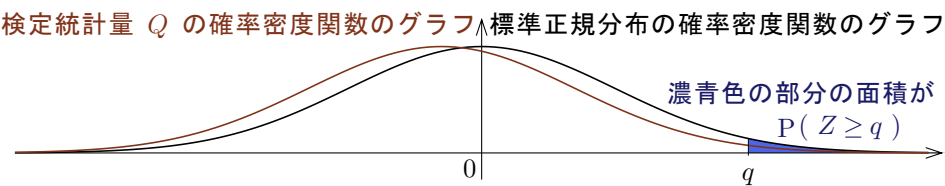
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



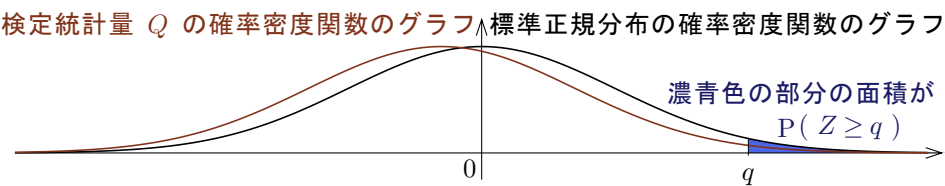
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



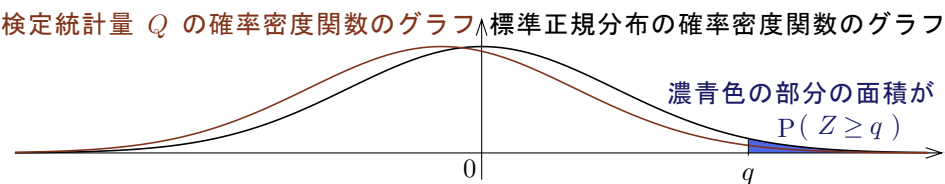
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



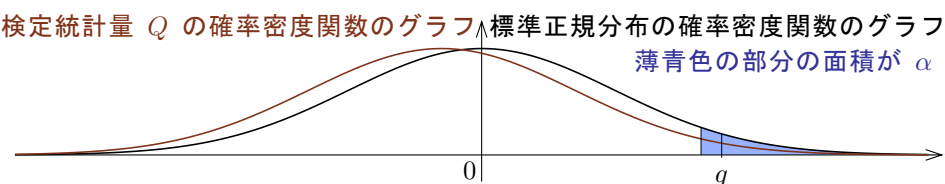
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。



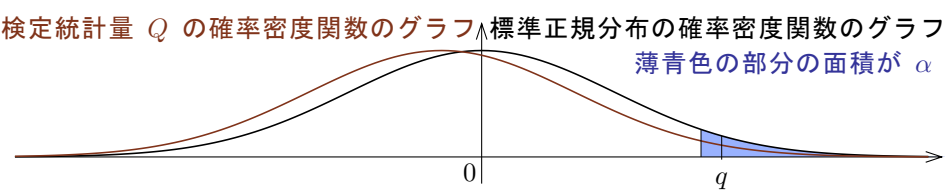
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である．帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で，検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として，



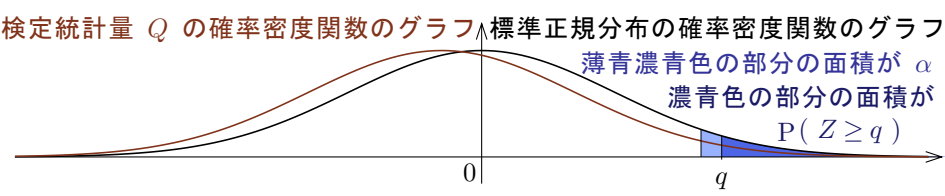
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；



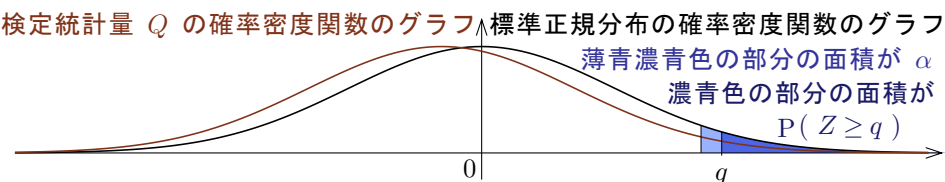
帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より大きいとき、甚だ不自然と想着て、帰無仮説を棄却する。



帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。



帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq q)$ は最大で $P(Z \geq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が大きいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \leq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \geq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \geq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。



結局、有意水準 α の右側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(Z \geq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu \leq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる。

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \quad -m$,

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \quad \overline{X} - m$,

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \quad \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \quad E[Z] = \quad .$$

仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q .$$

確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \geq E[Z] = 0 .$$

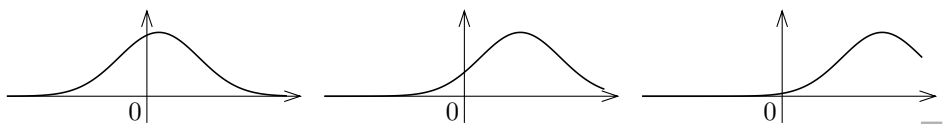
仮説 $\mu < m$ を検討する. 帰無仮説 $\mu \geq m$ を立てる. $-\mu \leq -m$,
 $\overline{X} - \mu \leq \overline{X} - m$, よって, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ について

$$Z = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m) = Q.$$

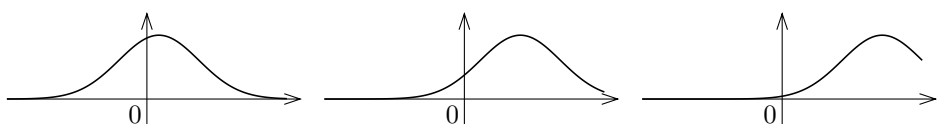
確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従うので,

$$E[Q] \geq E[Z] = 0.$$

Q の平均値が 0 以上なので, Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる.

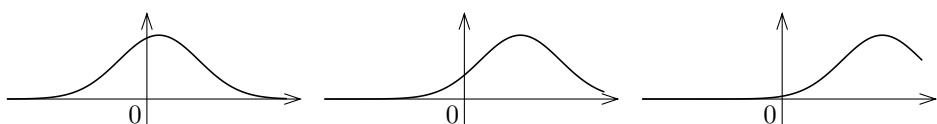


Q の平均値が 0 以上なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



Q の平均値が 0 よりどれくらい大きいか不明なので、 Q の値が 0 よりいく
ても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より
ほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \geq m$ は疑わしい。

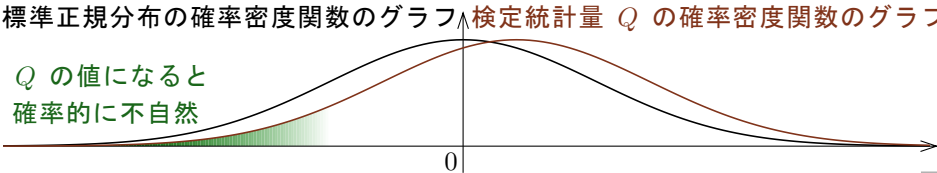
Q の平均値が 0 以上なので、 Q の確率密度関数のグラフは例えば次の図のようになる。



Q の平均値が 0 よりどれくらい大きいか不明なので、 Q の値が 0 よりいくらか大きくても確率的に不自然とはいえない。しかし、 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然なので帰無仮説 $\mu \geq m$ は疑わしい。

標準正規分布の確率密度関数のグラフ 検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ

Q の値になると
確率的に不自然



帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である．帰無仮説より $Z \leq Q$ なので，

$$\leq q \text{ ならば } \leq q ,$$

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である．帰無仮説より $Z \leq Q$ なので，

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど，確率的に不自然である．そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する．このように，数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき，左側検定という．

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので， Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である．帰無仮説より $Z \leq Q$ なので，

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

$$P(Q \leq q) = P(Z \leq q) .$$

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

$$P(Q \leq q) \leq P(Z \leq q) .$$

事象 A と B について、“ A ならば B ” であるとき、 A の範囲は B の範囲に含まれるので、“ $P(A) \leq P(B)$ ” である。

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど、確率的に不自然である。そこで Q の実現値がある負の実数より小さいとき帰無仮説を棄却する。このように、数直線において帰無仮説が疑わしくなるような検定統計量の実現値の範囲が基準となる確率分布の中心（標準正規分布では 0）の左側だけにあるとき、左側検定という。

帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が小さいほど確率的に不自然なので、 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(Q \leq q)$ である。帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、

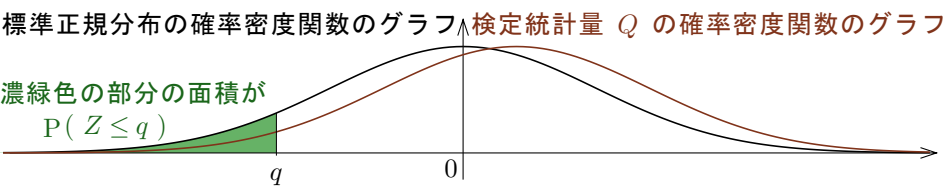
$$Q \leq q \text{ ならば } Z \leq q ,$$

よって

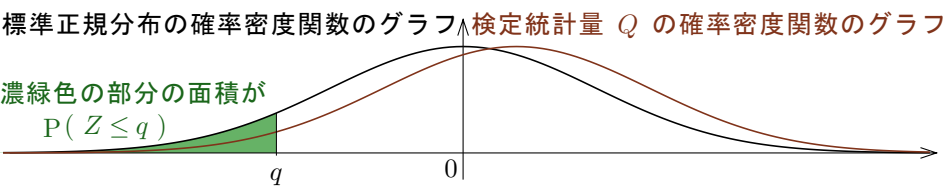
$$P(Q \leq q) \leq P(Z \leq q) .$$

帰無仮説の下で検定統計量 Q の値が q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。

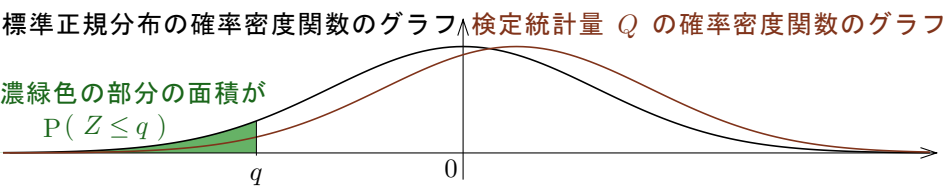
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。



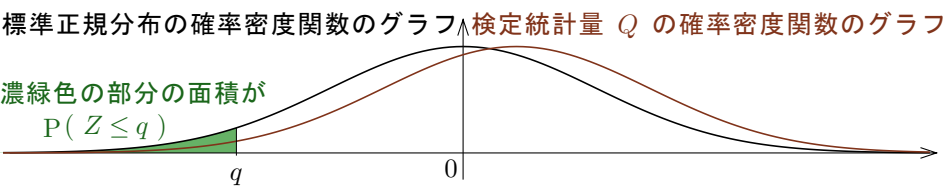
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



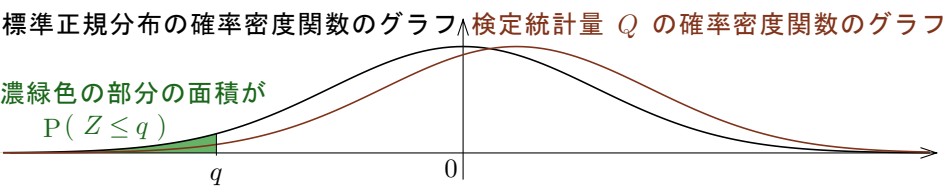
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



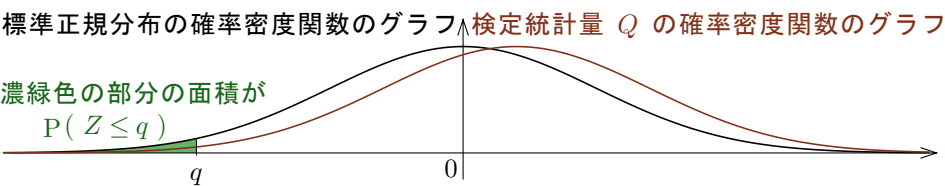
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



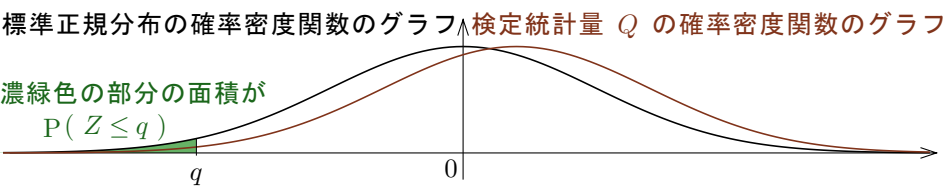
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



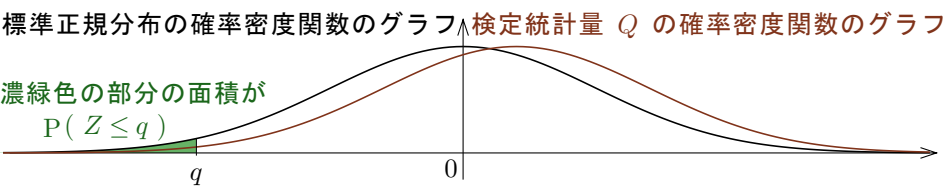
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である. Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が



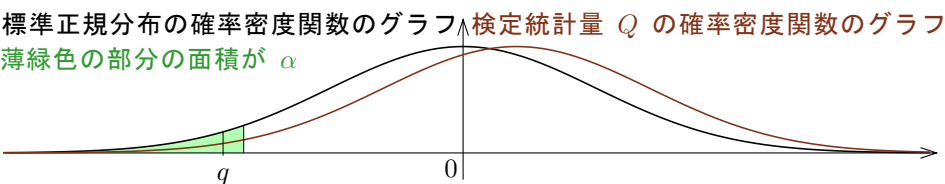
帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で，検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である． Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である．



帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。 帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、

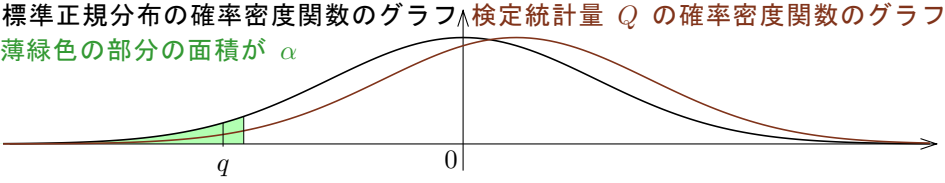


帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；

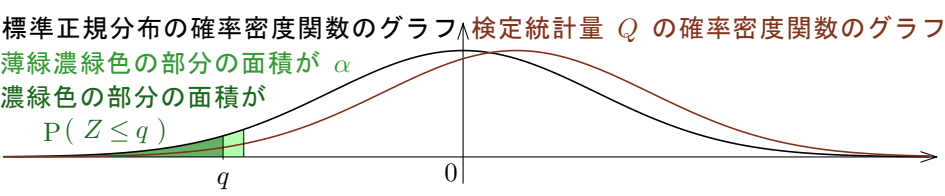


帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より
とき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。

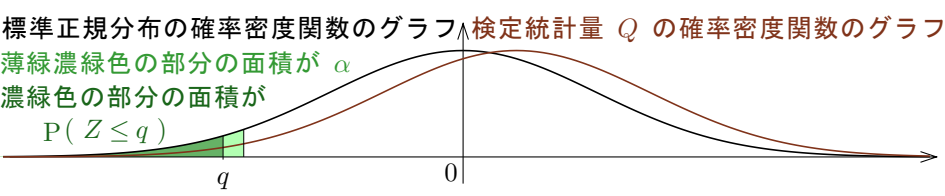
標準正規分布の確率密度関数のグラフ 検定統計量 Q の確率密度関数のグラフ
薄緑色の部分の面積が α



帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる；p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。



帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の値が実数 q 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq q)$ は最大で $P(Z \leq q)$ である。 Q の値 q についてこの確率が小さいほど q が小さいので確率的に不自然である。帰無仮説 $\mu \geq m$ の下で、検定統計量 Q の実現値 q に対する確率 $P(Z \leq q)$ を p 値として、この p 値を有意水準 α と比べる； p 値 $P(Z \leq q)$ が有意水準 α より小さいとき、甚だ不自然と考えて、帰無仮説を棄却する。



結局、有意水準 α の左側 Z 検定で、検定統計量 Q の実現値 q について $P(Z \leq q) < \alpha$ のときに限り、帰無仮説 $\mu \geq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる。

右側検定と左側検定とを併せて片側検定という.

[公式 8.2] 無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して, 仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めると次のようになる.

[公式 8.2] 無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して, 仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めると次のようになる.

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu = m$ が棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる.

[公式 8.2] 無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して, 仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めると次のようになる.

(1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu = m$ が棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる.

(2) 有意水準 α の右側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \geq q)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu \leq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる.

[公式 8.2] 無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数を Z とおく. 実数 α は 0 に近い正の数とする. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m に対して, 仮説 $\mu \neq m$ 或いは $\mu > m$ 或いは $\mu < m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めると次のようになる.

- (1) 有意水準 α の両側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(|Z| \geq |q|) = 2P(Z \geq |q|)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu = m$ が棄却されて対立仮説 $\mu \neq m$ がいえる.
 - (2) 有意水準 α の右側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \geq q)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu \leq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu > m$ がいえる.
 - (3) 有意水準 α の左側 Z 検定で, 検定統計量 Q の実現値 q に対して p 値 $P(Z \leq q)$ が α より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu \geq m$ が棄却されて対立仮説 $\mu < m$ がいえる.
-

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布に従う確率変数を Z とおく.

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布に従う確率変数を Z とおく. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めた.

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布に従う確率変数を Z とおく. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めた. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない;

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく. 標準正規分布に従う確率変数を Z とおく. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\overline{X} - m)$ と定めた. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした;

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\bar{X}$ とおく。標準正規分布に従う確率変数を Z とおく。未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき、標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ と定めた。帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して、 Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが、この確率は計算できない； $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした； $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\mu = m$ のときなので、 p 値を求めるには $\mu = m$ のときを考えればよいことになる。

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\bar{X}$ とおく。標準正規分布に従う確率変数を Z とおく。未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき、標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ と定めた。帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して、 Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが、この確率は計算できない； $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした； $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\mu = m$ のときなので、 p 値を求めるには $\mu = m$ のときを考えればよいことになる。それ故、対立仮説 $\mu > m$ を検討するには帰無仮説として $\mu = m$ を仮定して p 値を求めることが多い。

無限母集団から無作為抽出された充分大きい大きさ n の標本の標本平均を表す確率変数を $\bar{X}$ とおく. 標準正規分布に従う確率変数を Z とおく. 未知の母平均 μ 及び与えられた実数 m について仮説 $\mu > m$ を検討するとき, 標本の不偏分散を u として検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{n}{u}}(\bar{X} - m)$ と定めた. 帰無仮説 $\mu \leq m$ を仮定して, Q の実現値 q に対して $P(Q \geq q)$ を考えるが, この確率は計算できない; $P(Q \geq q)$ の最大の値が $P(Z \geq q)$ なのでこれを p 値とした; $P(Q \geq q) = P(Z \geq q)$ となるのは $\mu = m$ のときなので, p 値を求めるには $\mu = m$ のときを考えればよいことになる. それ故, 対立仮説 $\mu > m$ を検討するには帰無仮説として $\mu = m$ を仮定して p 値を求めることが多い. 同様の理由で, 対立仮説 $\mu < m$ を検討するには帰無仮説として $\mu = m$ を仮定して p 値を求めることが多い.

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \quad)$ に従うとする。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu \neq 40$ といえるか考えるので、帰無仮説を立てる。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu \neq 40$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu = 40$ を立てる。

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu \neq 40$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu = 40$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q =$$

例 大きさ約 60 万の母集団から無作為抽出された大きさ 150 のある標本において、標本の平均は 40.35 であり、標本の不偏分散は 4.7 であった。母平均が 40 でないといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 4.7 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{4.7}{150}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{4.7}{150}}} = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu \neq 40$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu = 40$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) \quad \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値
と確率的に不自然である.

ほ

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって 側検定を行う.

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって両側検定を行う.

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって両側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 40.35 なので, $Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{150}{4.7}} (40.35 - 40) \doteq 1.9773 .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって両側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 40.35 なので, $Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{150}{4.7}} (40.35 - 40) \doteq 1.9773 .$$

帰無仮説より $Q = Z$ なので, Q の値が実現値 1.9773 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \quad \quad \quad) = P(|Z| \quad \quad \quad) .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって両側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 40.35 なので, $Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{150}{4.7}} (40.35 - 40) \doteq 1.9773 .$$

帰無仮説より $Q = Z$ なので, Q の値が実現値 1.9773 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq 1.9773) = P(|Z| \geq 1.9773) .$$

帰無仮説 $\mu = 40$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である. よって両側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 40.35 なので, $Q = \sqrt{\frac{150}{4.7}} (\bar{X} - 40)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{150}{4.7}} (40.35 - 40) \doteq 1.9773 .$$

帰無仮説より $Q = Z$ なので, Q の値が実現値 1.9773 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq 1.9773) = P(|Z| \geq 1.9773) .$$

この p 値 $P(|Z| \geq 1.9773)$ が有意水準 5% より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu = 40$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する.

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq 1.9773) &= 2 P(Z \geq 1.9773) = 2\{1 - P(Z \leq 1.9773)\} \\ &= 2\{1 - \Phi(1.9773)\} \doteq 2(1 - 0.9760) \\ &= 0.0480 . \end{aligned}$$

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq 1.9773) &= 2 P(Z \geq 1.9773) = 2\{1 - P(Z \leq 1.9773)\} \\ &= 2\{1 - \Phi(1.9773)\} \doteq 2(1 - 0.9760) \\ &= 0.0480 . \end{aligned}$$

$P(|Z| \geq 1.9773) < 0.05$ なので, 帰無仮説 $\mu = 40$ は棄却される. 故に, 有意水準 5% の両側 Z 検定で, 母平均が 40 でないといえる.

終

問8.2.1 ある商品には内容の重量が 90g と表示されていた. この商品をあちこちから 200 個を選んでそれらの重量を調べる. 選ばれた 200 個の商品を, この商品の全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える. 調査の結果, 標本の重量の平均が 89.76g で不偏分散が 13.00g^2 であった. この商品の重量の平均は 90g でないといえるか, 有意水準 5% で検定せよ. 用いる確率変数を記し, 検定統計量 Q を定め, p 値を小数点以下 5 桁まで求めること. 推論の過程を述べること.

母平均（単位は g）を μ とおく．標本の大きさは充分大きいので，母分散を標本の不偏分散 3.00（単位は g^2 ）で代替する．標本平均（単位は g）を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.00}{200}\right)$ に従うとする． $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.00}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.00}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う． $\mu \neq 90$ といえるか考えるので，帰無仮説 $\mu = 90$ を立てる．検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{200}{3.00}} (\bar{X} - 90) .$$

帰無仮説 $\mu = 90$ より，

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.00}} (\bar{X} - \mu) = \sqrt{\frac{200}{3.00}} (\bar{X} - 90) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] = E[Z] = 0$. Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である．よって両側検定を行う． $\bar{X}$ の実現値が 89.76 なので， Q の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.00}} (89.76 - 90) \doteq -1.95959 .$$

帰無仮説より $Q = Z$ なので， Q の値が実現値 -1.9773 以上に不自然な範囲に入る確率は

$$P(|Q| \geq 1.95959) = P(|Z| \geq 1.95959) .$$

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく．p 値は

$$\begin{aligned} P(|Z| \geq 1.95959) &= 2P(Z \geq 1.95959) = 2\{1 - P(Z \leq 1.95959)\} \\ &= 2\{1 - \Phi(1.95959)\} \doteq 2 \times (1 - 0.97498) \\ &= 0.05004 . \end{aligned}$$

$P(|Z| \geq 1.95959) \not\leq 0.05$ なので，帰無仮説 $\mu = 90$ は棄却されない．故に，有意水準 5% の両側 Z 検定で，この商品の内容の重量の平均は 90g でないといえない．

母平均（単位は g）を μ とおく．標本平均（単位は g）を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.00}{200}\right)$ に従うので，確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.00}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.00}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．帰無仮説 $\mu = 90$ を立てる．検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{200}{3.00}}(\bar{X} - 90)$ と定める．帰無仮説より $Q = Z$ なので， Q の値の絶対値が大きいほど確率的に不自然である． Q の値が実現値 $\sqrt{\frac{200}{3.00}}(89.76 - 90) \doteq -1.95959$ 以上に不自然な範囲に入る確率は $P(|Q| \geq 1.95959) = P(|Z| \geq 1.95959) = 0.05004$ なので，p 値は 0.05004 である．故に帰無仮説 $\mu = 90$ は棄却されない．有意水準 5% の両側 Z 検定で，この商品の内容の重量の平均は 90g でないといえない．

終

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、 p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \quad)$ に従うとする。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu > 70$ といえるか考えるので、帰無仮説を立てる。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu > 70$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \leq 70$ を立てる。

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu > 70$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \leq 70$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q =$$

例 大きさ約 50 万の母集団から無作為抽出された大きさ 200 のある標本において、標本の平均は 70.21 であり、標本の不偏分散は 3.2 であった。母平均が 70 より大きいといえるか、p 値を求めて有意水準 5% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.2 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.2}{200}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.2}{200}}} = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu > 70$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \leq 70$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \quad \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0
ほど確率的に不自然である.

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって 側検定を行う.

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う.

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}} (\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}} (70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602 .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602.$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, ≥ 1.6602 ならば ≥ 1.6602 , よって

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602.$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 1.6602$ ならば $Z \geq 1.6602$, よって

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 1.6602$ ならば $Z \geq 1.6602$, よって

$$P(Q \geq 1.6602) \quad P(Z \geq 1.6602) .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 1.6602$ ならば $Z \geq 1.6602$, よって

$$P(Q \geq 1.6602) \leq P(Z \geq 1.6602) .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602.$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 1.6602$ ならば $Z \geq 1.6602$, よって

$$P(Q \geq 1.6602) \leq P(Z \geq 1.6602).$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 1.6602 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 1.6602)$ は最大で $P(Z \geq 1.6602)$ である.

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である. よって右側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 70.21 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{200}{3.2}}(\bar{X} - 70)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{200}{3.2}}(70.21 - 70) = \sqrt{\frac{200}{3.2}} \cdot 0.21 \doteq 1.6602.$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので, $Q \geq 1.6602$ ならば $Z \geq 1.6602$, よって

$$P(Q \geq 1.6602) \leq P(Z \geq 1.6602).$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 1.6602 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 1.6602)$ は最大で $P(Z \geq 1.6602)$ である. この p 値 $P(Z \geq 1.6602)$ が有意水準 5% より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu \leq 70$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する.

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \geq 1.6602) &= 1 - P(Z \leq 1.6602) = 1 - \Phi(1.6602) \doteq 1 - 0.9516 \\ &= 0.0484 . \end{aligned}$$

$P(Z \geq 1.6602) < 0.05$ なので, 帰無仮説 $\mu \leq 70$ は棄却される. 故に, 有意水準 5% の右側 Z 検定で, 母平均が 70 より大きいといえる. 終

問8.2.2 ある家具メーカーで作られたある棚の製品の中から 100 個を選んでそれらの耐荷重を調べる. 選ばれた 100 個の製品を, この製品の棚全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える. 調査の結果, 標本の耐荷重の平均が 70.32kg で不偏分散が 1.89kg^2 であった. この製品の耐荷重は平均で 70kg より重いといえるか, 検定統計量 Q を定め, p 値を小数点以下 5 桁まで求めて有意水準 1% で検定せよ. 用いる確率変数を記し, 検定統計量 Q を定め, p 値を小数点以下 5 桁まで求めること. 推論の過程を述べること.

母平均（単位は kg）を μ とおく．標本の大きさは充分大きいので，母分散を標本の不偏分散 1.89（単位は kg^2 ）で代替する．標本平均（単位は kg）を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{1.89}{100}\right)$ に従うとする． $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1.89}{100}}} = \sqrt{\frac{100}{1.89}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う． $\mu > 70$ といえるか考えるので，帰無仮説 $\mu \leq 70$ を立てる．検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{100}{1.89}} (\bar{X} - 70) .$$

帰無仮説 $\mu \leq 70$ より，

$$Z = \sqrt{\frac{100}{1.89}} (\bar{X} - \mu) \geq \sqrt{\frac{100}{1.89}} (\bar{X} - 70) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \leq E[Z] = 0$. Q の値が 0 より大きいほど確率的に不自然である．よって右側検定を行う． $\bar{X}$ の実現値が 70.32 なので， Q の実現値は

$$\sqrt{\frac{100}{1.89}} (70.32 - 70) = \sqrt{\frac{100}{1.89}} \cdot 0.32 \doteq 2.32766 .$$

帰無仮説より $Z \geq Q$ なので， $Q \geq 2.32766$ ならば $Z \geq 2.32766$ ，よって

$$P(Q \geq 2.32766) \leq P(Z \geq 2.32766) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 2.32766 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 2.32766)$ は最大で $P(Z \geq 2.32766)$ である．この p 値 $P(Z \geq 2.32766)$ が有意水準 1% より小さいときに限り，帰無仮説 $\mu \leq 70$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する．標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく．p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \geq 2.32766) &= 1 - P(Z \leq 2.32766) = 1 - \Phi(2.32766) \doteq 1 - 0.99003 \\ &= 0.00997 . \end{aligned}$$

$P(Z \geq 2.32766) < 0.01$ なので，帰無仮説 $\mu \leq 70$ は棄却される．故に，有意水準 1% の右側 Z 検定で，この製品の耐荷重は平均で 70kg より重いといえる．

母平均（単位は kg）を μ とおく．標本平均（単位は kg）を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{1.89}{100}\right)$ に従うとする．確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1.89}{100}}} = \sqrt{\frac{100}{1.89}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布に従う．帰無仮説 $\mu \leq 70$ を立てる．検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{100}{1.89}}(\bar{X} - 70)$ と定める．帰無仮説より $Q \leq Z$ なので， Q の値が大きいほど確率的に不自然である． Q の値が実現値 $\sqrt{\frac{100}{1.89}}(70.32 - 70) \doteq 2.32766$ 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \geq 2.32766)$ は最大で $P(Z \geq 2.32766) = 0.00997$ なので，p 値は 0.00997 である．故に，帰無仮説 $\mu \leq 70$ は棄却される．有意水準 1% の右側 Z 検定で，この製品の耐荷重は平均で 70kg より重いといえる．

終

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、 p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、 p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N(\mu, \quad)$ に従うとする。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}}$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu < 80$ といえるか考えるので、帰無仮説を立てる。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu < 80$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \geq 80$ を立てる。

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu < 80$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \geq 80$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q =$$

例 無限母集団から無作為抽出された大きさ 300 のある標本において、標本の平均は 79.75 であり、標本の不偏分散は 3.5 であった。母平均が 80 より小さいといえるか、p 値を求めて有意水準 1% で仮説検定する。

母集団の大きさに対する標本の大きさの割合はきわめて小さいので無限母集団と考える。母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 3.5 で代替する。抽出された標本の平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{3.5}{300}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{3.5}{300}}} = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu < 80$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \geq 80$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \quad \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0
ほど確率的に不自然である.

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって 側検定を行う.

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う.

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}} (79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (-0.25) \doteq -2.3146 .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146.$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, ≤ -2.3146 ならば ≤ -2.3146 ,

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -2.3146$ ならば $Z \leq -2.3146$,

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -2.3146$ ならば $Z \leq -2.3146$, よって

$$P(Q \leq -2.3146) \quad P(Z \leq -2.3146) .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -2.3146$ ならば $Z \leq -2.3146$, よって

$$P(Q \leq -2.3146) \leq P(Z \leq -2.3146) .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146.$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -2.3146$ ならば $Z \leq -2.3146$, よって

$$P(Q \leq -2.3146) \leq P(Z \leq -2.3146).$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 -2.3146 以上に不自然な範囲に入る確率は最大 $P(Z \leq -2.3146)$ である.

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より,

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80) = Q.$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. 検定統計量 Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である. よって左側検定を行う. $\bar{X}$ の実現値が 79.75 なので, 検定統計量 $Q = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(\bar{X} - 80)$ の実現値は

$$\sqrt{\frac{300}{3.5}}(79.75 - 80) = \sqrt{\frac{300}{3.5}}(-0.25) \doteq -2.3146.$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので, $Q \leq -2.3146$ ならば $Z \leq -2.3146$, よって

$$P(Q \leq -2.3146) \leq P(Z \leq -2.3146).$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 -2.3146 以上に不自然な範囲に入る確率は最大 $P(Z \leq -2.3146)$ である. この p 値 $P(Z \leq -2.3146)$ が有意水準 1% より小さいときに限り, 帰無仮説 $\mu \geq 80$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する.

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \leq -2.3146) &= \Phi(-2.3146) = 1 - \Phi(2.2361) \doteq 1 - 0.9897 \\ &= 0.0103 \end{aligned}$$

標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく. p 値は

$$\begin{aligned} P(Z \leq -2.3146) &= \Phi(-2.3146) = 1 - \Phi(2.2361) \doteq 1 - 0.9897 \\ &= 0.0103 \end{aligned}$$

$P(Z \leq -2.3146) \not\leq 0.01$ なので, 帰無仮説 $\mu \geq 80$ は棄却されない. 故に, 有意水準 1% の左側 Z 検定で, 母平均が 80 より小さいといえない.

終

問8.2.3 ある蜜柑農園で収穫前の蜜柑から無作為に 120 個を選んで酸度を調べた。この 120 個の蜜柑を、この農園でこのとき栽培された蜜柑の全体を無限母集団としてそこから無作為抽出された標本と考える。調査の結果、標本の酸度の平均が 0.753 で不偏分散が 0.049 であった。このときの農園の蜜柑の酸度は平均で 0.8 より小さいといえるか、有意水準 1% で検定せよ。用いる確率変数を記し、検定統計量 Q を定め、 p 値を小数点以下 5 桁まで求めること。推論の過程を述べること。

母平均を μ とおく。標本の大きさは充分大きいので、母分散を標本の不偏分散 0.049 で代替する。標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{0.049}{120}\right)$ に従うとする。 $\bar{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0.049}{120}}} = \sqrt{\frac{120}{0.049}} (\bar{X} - \mu)$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。 $\mu < 0.8$ といえるか考えるので、帰無仮説 $\mu \geq 0.8$ を立てる。検定統計量 Q を次のように定める：

$$Q = \sqrt{\frac{120}{0.049}} (\bar{X} - 0.8) .$$

帰無仮説 $\mu \geq 80$ より、

$$Z = \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - \mu) \leq \sqrt{\frac{300}{3.5}} (\bar{X} - 0.8) = Q .$$

Z は標準正規分布に従うので $E[Q] \geq E[Z] = 0$. Q の値が 0 より小さいほど確率的に不自然である。よって左側検定を行う。 $\bar{X}$ の実現値が 0.753 なので、 Q の実現値は

$$\sqrt{\frac{120}{0.049}} (0.753 - 0.8) = \sqrt{\frac{120}{0.049}} (-0.047) \doteq -2.32590 .$$

帰無仮説より $Z \leq Q$ なので、 $Q \leq -2.32590$ ならば $Z \leq -2.32590$, よって

$$P(Q \leq -2.32590) \leq P(Z \leq -2.32590) .$$

帰無仮説の下で Q の値が実現値 -2.32590 以上に不自然な範囲に入る確率は最大 $P(Z \leq -2.32590)$ である。この p 値 $P(Z \leq -2.32590)$ が有意水準 1% より小さいときに限り、帰無仮説 $\mu \geq 80$ は甚だ不自然と考えてこれを棄却する。標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく。 p 値は

$$P(Z \leq -2.32590) = \Phi(-2.32590) \doteq 0.01001 .$$

$P(Z \leq -2.32590) \not\leq 0.01$ なので、帰無仮説 $\mu \geq 0.8$ は棄却されない。故に、有意水準 1% の左側 Z 検定で、このときの農園の蜜柑の酸度は平均で 0.8 より小さいといえない。

母平均を μ とおく．標本平均を表す確率変数 $\bar{X}$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{0.049}{120}\right)$ に従うとする．確率変数 $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{0.049}{120}}} = \sqrt{\frac{120}{0.049}}(\bar{X} - \mu)$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．帰無仮説 $\mu \geq 0.8$ を立てる．検定統計量 Q を $Q = \sqrt{\frac{120}{0.049}}(\bar{X} - 0.8)$ と定める．帰無仮説より $Q \geq Z$ なので， Q の値が小さいほど確率的に不自然である． Q の値が実現値 $\sqrt{\frac{120}{0.049}}(0.753 - 0.8) \doteq -2.32590$ 以上に不自然な範囲に入る確率 $P(Q \leq -2.32590)$ は最大で $P(Z \leq -2.32590) \doteq 0.01001$ なので，p 値は 0.01001 である．故に，帰無仮説 $\mu \geq 0.8$ は棄却されない．有意水準 1% の左側 Z 検定で，このときの農園の蜜柑の酸度は平均で 0.8 より小さいといえない．

例 無限母集団から無作為抽出された大標本の標本平均が 9.01 で標本の不偏分散が 1 であるとする。母平均 μ が 9 より大きいかどうか、有意水準 1% で右側検定する。標準正規分布の累積分布関数を Φ とおく。標本の大きさが 10000 のとき、p 値は

$$P(Z \geq \sqrt{10000} \cdot 0.01) = P(Z \geq 1) = 1 - \Phi(1) \doteq 0.15866$$

なので帰無仮説 $\mu \leq 9$ は棄却されない。標本の大きさが 50000 のとき、p 値は

$$P(Z \geq \sqrt{50000} \cdot 0.01) \doteq P(Z \geq 2.2361) = 1 - \Phi(2.2361) \doteq 0.01267$$

なので帰無仮説 $\mu \leq 9$ は棄却されない。標本の大きさが 55000 のとき、p 値は

$$P(Z \geq \sqrt{55000} \cdot 0.01) \doteq P(Z \geq 2.3452) = 1 - \Phi(2.3452) \doteq 0.00951$$

なので帰無仮説 $\mu \leq 9$ が棄却されて母平均は 9 より大きいといえる。 **終**

母平均 μ に関する Z 検定では、与えられた定数 m に対して、標本の大きさを何万とかにしてようやく帰無仮説 $\mu \leq m$ が棄却されるときは、 μ が m より大きいとってもほとんど差が無いこともあるので、現実的にあまり意味がないことも考えられる。
