

6.2 母平均の点推定

[定理] 母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の不偏推定量である.

例 母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された
大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で, 共に母集団分布に
従うものとする. $\sigma > 0$ とする.

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu, \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0.$$

例 母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された
大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、共に母集団分布に
従うものとする。 $\sigma > 0$ とする。

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu, \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0.$$

統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}.$$

例 母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された
大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、共に母集団分布に
従うものとする。 $\sigma > 0$ とする。

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu, \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0.$$

統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}.$$

上述の定理より T_1 は母平均 μ の不偏推定量である。また、

$$E[T_2] = E\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = \frac{2E[X_1] + E[X_2]}{3} = \frac{2\mu + \mu}{3} = \mu.$$

従って、統計量 T_2 も母平均 μ の不偏推定量である。

例 母平均が μ であり母標準偏差が σ である母集団から無作為抽出された
大きさ 2 の標本の標本確率変数 X_1, X_2 は互いに独立で、共に母集団分布に
従うものとする。 $\sigma > 0$ とする。

$$E[X_1] = E[X_2] = \mu, \quad V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2 > 0.$$

統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}.$$

上述の定理より T_1 は母平均 μ の不偏推定量である。また、

$$E[T_2] = E\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = \frac{2E[X_1] + E[X_2]}{3} = \frac{2\mu + \mu}{3} = \mu.$$

従って、統計量 T_2 も母平均 μ の不偏推定量である。このように、 T_1 も T_2
も母平均の不偏推定量なので、不偏性という観点だけでは母平均の推定量とし
てどちらの方が望ましいともいえない。

統計量 T_1 と T_2 について分散を計算する.

統計量 T_1 と T_2 について分散を計算する. 標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので, $T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2, \end{aligned}$$

統計量 T_1 と T_2 について分散を計算する. 標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので, $T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2, \end{aligned}$$

$T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = V\left[\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] = \frac{4}{9}V[X_1] + \frac{1}{9}V[X_2] = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{9}\sigma^2. \end{aligned}$$

統計量 T_1 と T_2 について分散を計算する. 標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので, $T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2, \end{aligned}$$

$T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = V\left[\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] = \frac{4}{9}V[X_1] + \frac{1}{9}V[X_2] = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{9}\sigma^2. \end{aligned}$$

このように $V[T_1] < V[T_2]$ なので, 推定量 T_1 は推定量 T_2 より有効である. つまり, T_2 の実現値より T_1 の実現値の方が母平均に近い値になり易い.

統計量 T_1 と T_2 について分散を計算する. 標本確率変数 X_1 と X_2 とは互いに独立なので, $T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2, \end{aligned}$$

$T_2 = \frac{2X_1 + X_2}{3}$ の分散は

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + X_2}{3}\right] = V\left[\frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2\right] = \frac{4}{9}V[X_1] + \frac{1}{9}V[X_2] = \frac{4}{9}\sigma^2 + \frac{1}{9}\sigma^2 \\ &= \frac{5}{9}\sigma^2. \end{aligned}$$

このように $V[T_1] < V[T_2]$ なので, 推定量 T_1 は推定量 T_2 より有効である. つまり, T_2 の実現値より T_1 の実現値の方が母平均に近い値になり易い. 故に母平均の推定量として T_2 より T_1 の方が望ましい. 終

問6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおく. 母平均を μ とおき, 母標準偏差を σ とおく. $\sigma > 0$ とする. 統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}.$$

統計量 T_2 は母平均 μ の不偏推定量であることを示せ.

統計量 T_2 の平均値 $E[T_2]$ を計算する. $E[X_1] = \mu$, $E[X_2] = \mu$ なので,

問6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおく. 母平均を μ とおき, 母標準偏差を σ とおく. $\sigma > 0$ とする. 統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}.$$

統計量 T_2 は母平均 μ の不偏推定量であることを示せ.

統計量 T_2 の平均値 $E[T_2]$ を計算する. $E[X_1] = \mu$, $E[X_2] = \mu$ なので,

$$\begin{aligned} E[T_2] &= E\left[\frac{2X_1 + 3X_2}{5}\right] = E\left[\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right] = E\left[\frac{2}{5}X_1\right] + E\left[\frac{3}{5}X_2\right] \\ &= \frac{2}{5}E[X_1] + \frac{3}{5}E[X_2] = \frac{2}{5}\mu + \frac{3}{5}\mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

従って統計量 T_2 は母平均 μ の不偏推定量である.

問6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおく. 母平均を μ とおき, 母標準偏差を σ とおく. $\sigma > 0$ とする. 統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める:

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}.$$

母平均 μ の推定量として T_1 と T_2 とのどちらが有効であることを調べよ.

統計量 T_1, T_2 の各々の分散 $V[T_1], V[T_2]$ を計算する. $V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2$ で X_1 と X_2 とは互いに独立である.

問6.2 無限母集団から大きさ 2 の標本を無作為に抽出するときの標本確率変数を X_1, X_2 とおく。母平均を μ とおき、母標準偏差を σ とおく。 $\sigma > 0$ とする。統計量 T_1 と T_2 とを次のように定める：

$$T_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad T_2 = \frac{2X_1 + 3X_2}{5}.$$

母平均 μ の推定量として T_1 と T_2 とのどちらが有効であることを調べよ。

統計量 T_1, T_2 の各々の分散 $V[T_1], V[T_2]$ を計算する。 $V[X_1] = V[X_2] = \sigma^2$ で X_1 と X_2 とは互いに独立である。

$$\begin{aligned} V[T_1] &= V\left[\frac{X_1 + X_2}{2}\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2\right] = V\left[\frac{1}{2}X_1\right] + V\left[\frac{1}{2}X_2\right] \\ &= \frac{1}{4}V[X_1] + \frac{1}{4}V[X_2] = \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[T_2] &= V\left[\frac{2X_1 + 3X_2}{5}\right] = V\left[\frac{2}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2\right] = V\left[\frac{2}{5}X_1\right] + V\left[\frac{3}{5}X_2\right] \\ &= \frac{4}{25}V[X_1] + \frac{9}{25}V[X_2] = \frac{4}{25}\sigma^2 + \frac{9}{25}\sigma^2 \\ &= \frac{13\sigma^2}{25}. \end{aligned}$$

従って $V[T_1] < V[T_2]$ なので、推定量 T_1 は推定量 T_2 より有効である。 **終**

標本確率変数の平均は母平均の一致推定量である.

[定理] 無限母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本の標本確率変数を $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

は母平均の一致推定量である.