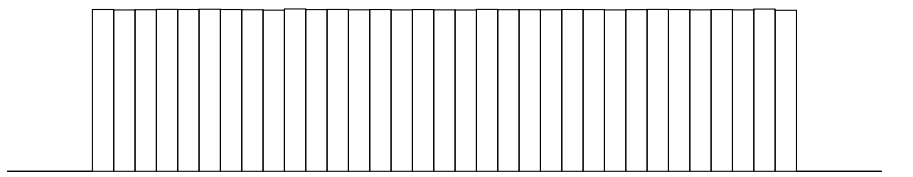
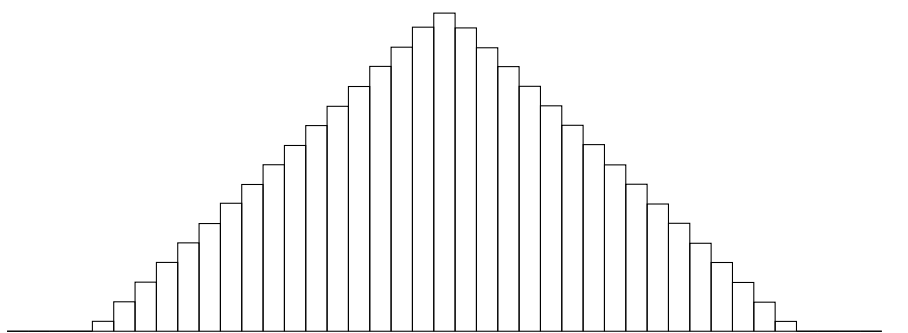


4.3 中心極限定理

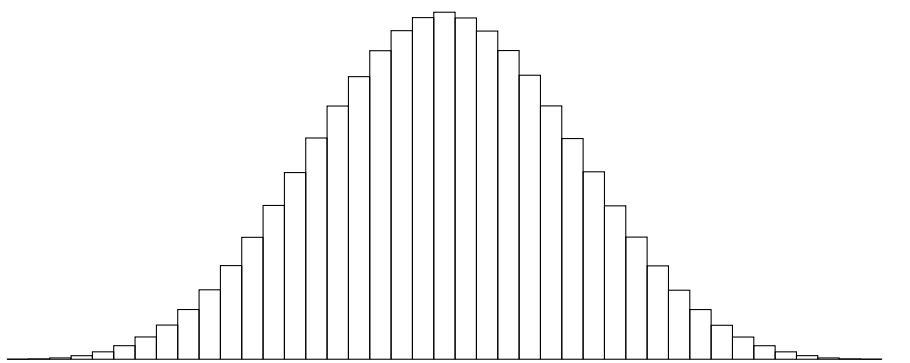
一様分布に従う確率変数の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると例えば下図のようになる。



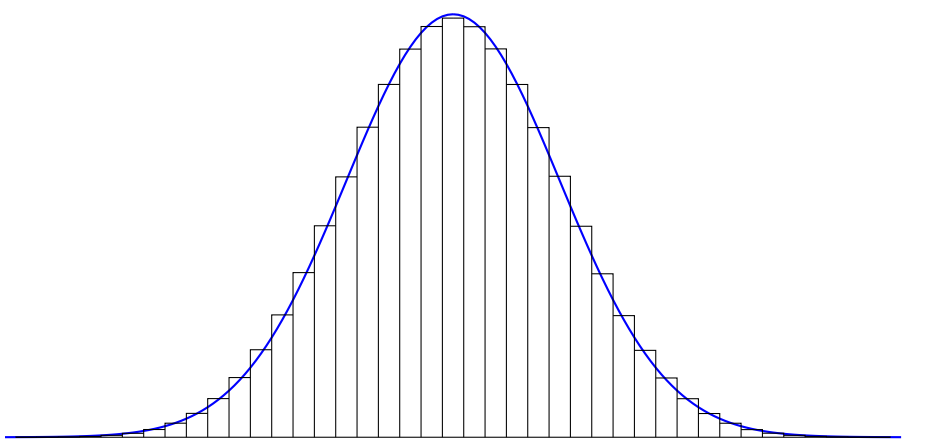
この一様分布に従う互いに独立な 2 個の確率変数 X_1, X_2 の平均 $\frac{X_1 + X_2}{2}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる。



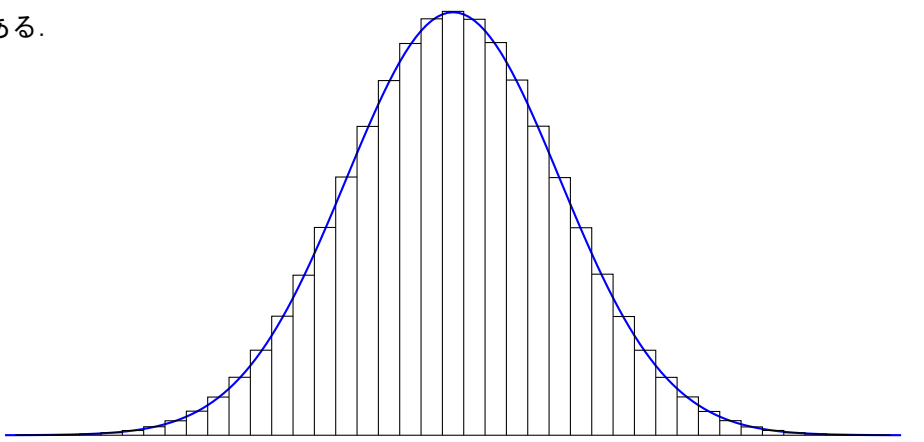
この一様分布に従う互いに独立な4個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4 の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる.



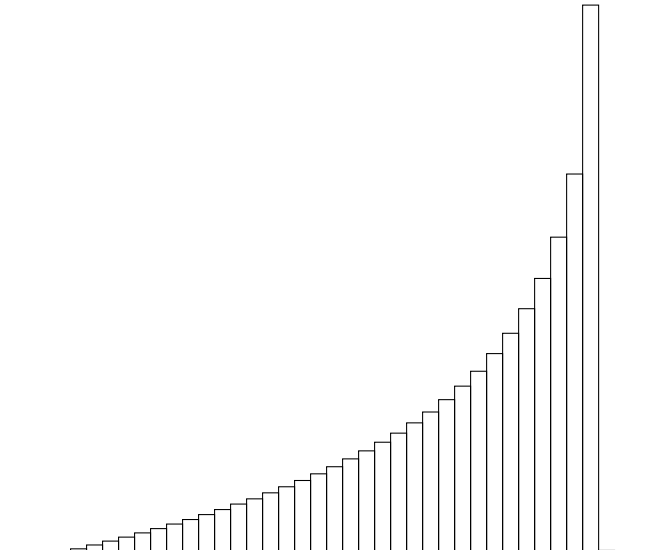
この一様分布に従う互いに独立な 10 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$ の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{10}}{10}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる。青色の曲線は正規分布の確率密度関数のグラフである。



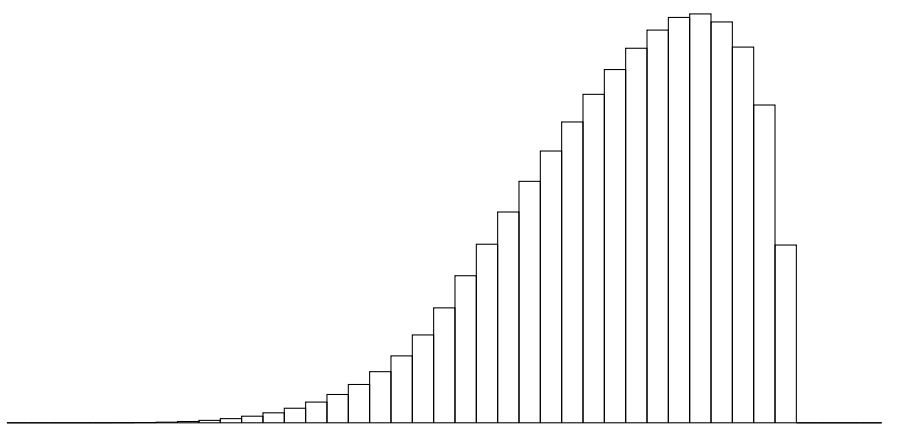
この一様分布に従う互いに独立な 100 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}}{100}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる。青色の曲線は正規分布の確率密度関数のグラフである。



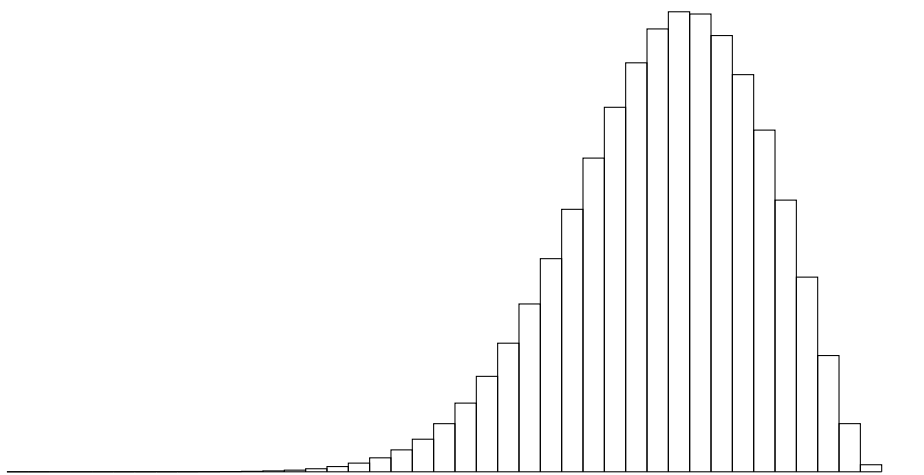
ある確率変数の
実現値を独立に何
回も求めてヒスト
グラムを作ると右
図のような偏った
分布になるとす
る。この確率分布
に従う互いに独立
な確率変数 X_1 ,
 $X_2, X_3, X_4, \dots$ を
考える。



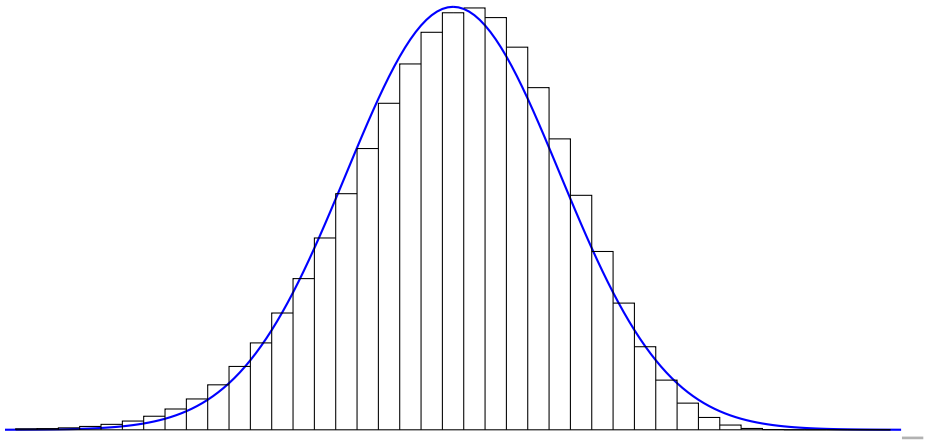
2 個の確率変数 X_1, X_2 の平均 $\frac{X_1 + X_2}{2}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる。



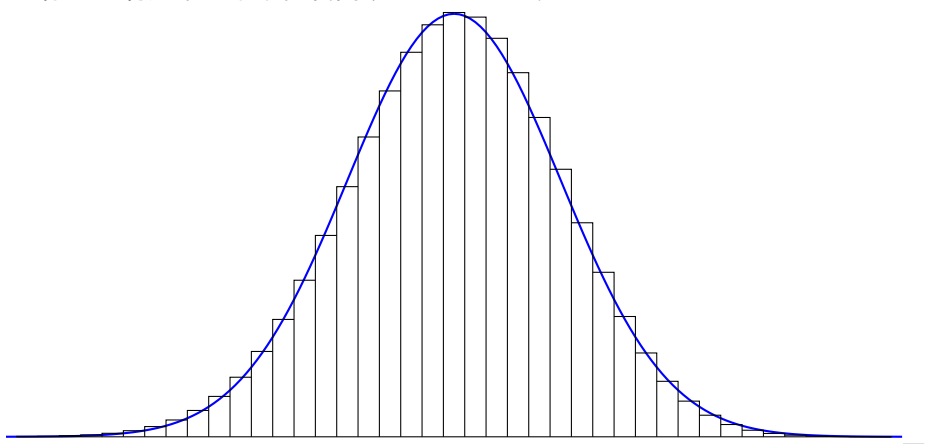
4 個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4 の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる.



10 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$ の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{10}}{10}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる。青色の曲線は正規分布の確率密度関数のグラフである。



100 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ の平均 $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}}{100}$ の実現値を独立に何回も求めてヒストグラムを作ると下図のようになる．青色の曲線は正規分布の確率密度関数のグラフである．



このように、同じ分布に従う（つまり累積分布関数が同じである）多数の互いに独立な確率変数の平均は近似的に正規分布に従ことが多い。

[定理 (中心極限定理)] 自然数 n は充分大きいとする. ある一つの分布に従う n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立でありそれらの平均値 μ と標準偏差 σ とがあるならば, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

[定理 (中心極限定理)] 自然数 n は充分大きいとする. ある一つの分布に従う n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立でありそれらの平均値 μ と標準偏差 σ とがあるならば, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

中心極限定理における前提は, 充分大きい自然数 n に対して, 互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が同じ分布に従い, その分布の平均値と標準偏差とがあるということなので, その分布は平均値と標準偏差とがあればどのような分布でもよいところが重要である.

[定理 (中心極限定理)] 自然数 n は充分大きいとする. ある一つの分布に従う n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立でありそれらの平均値 μ と標準偏差 σ とがあるならば, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は近似的に正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う.

正の自然数 n に対して, ある一つの分布に従う n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立でありそれらの平均値 μ と標準偏差 σ とがあるとき, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表す確率変数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ の分布を, n が 100 以上あれば中心極限定理により正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ で近似することが多いが, $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が従う分布が正規分布に近いときは n が 50 ぐらいいでも中心極限定理によって正規分布で近似することがある.

例 1 から 9 までの一様分布に従う 100 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく:
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}}{100}$$
. この確率変数 $\overline{X}$ について確率 $P(\overline{X} \leq 5.2)$ を近似的に求める.

例 1 から 9 までの一様分布に従う 100 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく:
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}}{100} .$$
 この確率変数 $\overline{X}$ について確率 $P(\overline{X} \leq 5.2)$ を近似的に求める.

確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ は互いに独立で, 総て 1 から 9 までの一様分布に従うので,

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_{100}] = \frac{1+9}{2} = 5 ,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_{100}] = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} .$$

例 1 から 9 までの一様分布に従う 100 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ が互いに独立であるとする。これらの平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく：
$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{100}}{100} .$$
 この確率変数 $\overline{X}$ について確率 $P(\overline{X} \leq 5.2)$ を近似的に求める。

確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{100}$ は互いに独立で、総て 1 から 9 までの一様分布に従うので、

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_{100}] = \frac{1+9}{2} = 5 ,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_{100}] = \frac{(9-1)^2}{12} = \frac{16}{3} .$$

中心極限定理により、確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(5, \frac{16}{300}\right) = N\left(5, \frac{4}{75}\right)$ に従う。よって、 $\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - 5}{\sqrt{\frac{4}{75}}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}(\overline{X} - 5)$$

は近似的に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。

$$\overline{X} \leq 5.2 \iff \frac{5\sqrt{3}}{2}(\overline{X} - 5) \leq \frac{5\sqrt{3}}{2}(5.2 - 5) \iff Z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$P(\overline{X} \leq 5.2) = P\left(Z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \doteq \Phi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \doteq \Phi(0.866) \doteq 0.803 . \quad \boxed{\text{終}}$$

問4.3 ポアソン分布 $\text{Po}(6)$ に従う 150 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{150}$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{150}}{150}.$$

この確率変数 $\overline{X}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 5.7)$ を近似的に求めよ.

確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{150}$ は互いに独立で, 総てポアソン分布 $\text{Po}(6)$ に従うので,

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_{150}] = \quad ,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_{150}] = \quad .$$

中心極限定理により, 確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(\quad, \quad\right) = N\left(\quad, \quad\right)$

に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - \quad}{\sqrt{\quad}} = (\overline{X} - \quad)$ は近似的

に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う.

問4.3 ポアソン分布 $\text{Po}(6)$ に従う 150 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{150}$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表す確率変数を $\overline{X}$ とおく:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{150}}{150} .$$

この確率変数 $\overline{X}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 5.7)$ を近似的に求めよ.

確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{150}$ は互いに独立で, 総てポアソン分布 $\text{Po}(6)$ に従うので,

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_{150}] = 6 ,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_{150}] = 6 .$$

中心極限定理により, 確率変数 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(6, \frac{6}{150}\right) = N\left(6, \frac{1}{25}\right)$

に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - 6}{\sqrt{\frac{1}{25}}} = 5(\overline{X} - 6)$ は近似的

に標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\overline{X} \geq 5.7 \iff 5(\overline{X} - 6) \geq 5(5.7 - 6) \iff Z \geq -1.5 .$$

よって

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geq 5.7) &= P(Z \geq -1.5) \doteq 1 - \Phi(-1.5) = 1 - \{1 - \Phi(1.5)\} = \Phi(1.5) \\ &\doteq 0.9332 . \end{aligned}$$

終