

4.2 多次元の確率変数

例えば、ある工場で生産されるある製品を何個か取り出してその製品の重量を測るとする。この工場で生産されるこの製品の重量がどのように分布するか定まっていて、かつ、製品の取り出し方が決まっているとする。このときこの工場で生産されるこの製品の 1 個の重量を表わす変数 X を確率変数と考えることができる。

例えば、ある工場で生産されるある製品を何個か取り出してその製品の重量を測るとする。この工場で生産されるこの製品の重量がどのように分布するか定まっていて、かつ、製品の取り出し方が決まっているとする。このときこの工場で生産されるこの製品の 1 個の重量を表わす変数 X を確率変数と考えることができる。この製品を順番に 1000 個取り出してそれらの製品の重量を測るとする。1 番めの製品の重量を表す変数を X_1 とおき、2 番めの製品の重量を表す変数を X_2 とおき、3 番めの製品の重量を表す変数を X_3 とおき、というように、1000 番めの製品の重量を表わす変数 X_{1000} まで考えると、1000 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{1000}$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{1000})$ ができる。

例えば、ある工場で生産されるある製品を何個か取り出してその製品の重量を測るとする。この工場で生産されるこの製品の重量がどのように分布するか定まっていて、かつ、製品の取り出し方が決まっているとする。このときこの工場で生産されるこの製品の 1 個の重量を表わす変数 X を確率変数と考えることができる。この製品を順番に 1000 個取り出してそれらの製品の重量を測るとする。1 番めの製品の重量を表す変数を X_1 とおき、2 番めの製品の重量を表す変数を X_2 とおき、3 番めの製品の重量を表す変数を X_3 とおき、というように、1000 番めの製品の重量を表わす変数 X_{1000} まで考えると、1000 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{1000}$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_{1000})$ ができる。このような 1000 個の確率変数の組を 1000 次元の確率変数という。

正の自然数 n に対して、 n 次元の確率変数とは大まかには 1 番から n 番までの番号が付いた確率変数の組である。但し、数学的には以下のように条件が付く。

[定義] n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ が n 次元の確率変数であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、

$$X_1 \leq a_1 \text{ かつ } X_2 \leq a_2 \text{ かつ } X_3 \leq a_3 \text{ かつ } \dots \text{ かつ } X_n \leq a_n$$

となる確率が定まる。

正の自然数 n に対して、 n 次元の確率変数とは大まかには 1 番から n 番までの番号が付いた確率変数の組である。但し、数学的には以下のように条件が付く。

[定義] n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ が n 次元の確率変数であるとは次の条件を満たすことである：任意の実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、

$$X_1 \leq a_1 \text{ かつ } X_2 \leq a_2 \text{ かつ } X_3 \leq a_3 \text{ かつ } \cdots \text{ かつ } X_n \leq a_n$$

となる確率が定まる。

n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ が n 次元の確率変数であるとき、任意の実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ に対して、“ $X_1 \leq a_1$ かつ $X_2 \leq a_2$ かつ $X_3 \leq a_3$ かつ $\cdots$ かつ $X_n \leq a_n$ ” となる確率を

$$P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, X_3 \leq a_3, \dots, X_n \leq a_n)$$

と書き表す。

[定義] n 個 (n は正の自然数) の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立であるとは次の条件を満たすことである: $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ が n 次元の確率変数であり, 任意の実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ について

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq a_1, X_2 \leq a_2, X_3 \leq a_3, \dots, X_n \leq a_n) = \\ P(X_1 \leq a_1) P(X_2 \leq a_2) P(X_3 \leq a_3) \cdots P(X_n \leq a_n) . \end{aligned}$$

2次元の確率変数と同様に次の定理が成り立つ.

[定理 4.2.1] n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ は n 次元の確率変数であるとする. 変数 Y を $Y = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ とおく. Y は (1 次元の) 確率変数であり,

$$E[Y] = E[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n] = E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + \dots + E[X_n] ;$$

更に, n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立であるならば,

$$V[Y] = V[X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n] = V[X_1] + V[X_2] + V[X_3] + \dots + V[X_n] .$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ は n 次元の確率変数であり,

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_n] = \mu,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_n] = \sigma^2$$

とする. 定理 4.2.1 により $X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ は確率変数である.

$$\mathrm{E}[X_1] = \mathrm{E}[X_2] = \mathrm{E}[X_3] = \cdots = \mathrm{E}[X_n] = \mu$$

より, $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

について,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\overline{X}] &= \mathrm{E}\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}\right] = \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)\right] \\ &= \frac{1}{n} \mathrm{E}[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n] \\ &= \frac{1}{n} (\mathrm{E}[X_1] + \mathrm{E}[X_2] + \mathrm{E}[X_3] + \cdots + \mathrm{E}[X_n]) \\ &= \frac{1}{n} (\underbrace{\mu + \mu + \mu + \cdots + \mu}_{n \text{ 個の和}}) = \frac{1}{n} (n\mu) \\ &= \mu . \end{aligned}$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \cdots = V[X_n] = \sigma^2$$

より, $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ が互いに独立であるならば, $X_1, X_2, X_3, \cdots, X_n$ の平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

について,

$$\begin{aligned} V[\overline{X}] &= V\left[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n}\right] = V\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n)\right] \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 V[X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2} (V[X_1] + V[X_2] + V[X_3] + \cdots + V[X_n]) \\ &= \frac{1}{n^2} (\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n \text{ 個の和}}) = \frac{1}{n^2} (n\sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{n} . \end{aligned}$$

[定理 4.2.2] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. n 個 (n は正の自然数) の変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の組 $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ は n 次元の確率変数であり,

$$E[X_1] = E[X_2] = E[X_3] = \dots = E[X_n] = \mu ,$$

$$V[X_1] = V[X_2] = V[X_3] = \dots = V[X_n] = \sigma^2$$

とする. $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ の平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

について,

$$E[\overline{X}] = \mu ,$$

n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立であるならば

$$V[\overline{X}] = \frac{\sigma^2}{n} , \quad \sigma[\overline{X}] = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} .$$

互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が総て例えば一様分布に従うときでも、確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$ が一様分布に従うとは限らない.

互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が総て例えば一様分布に従うときでも、確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$ が一様分布に従うとは限らない。しかし特に正規分布については次の定理が成り立つ。

[定理 4.2.3] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする。正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う n 個 (n は正の自然数) の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ が互いに独立であるならば、これらの平均を表わす確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ は正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

例 正規分布 $N(70, 90)$ に従う 5 個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 75)$ を求める.

例 正規分布 $N(70, 90)$ に従う 5 個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 75)$ を求める.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(70, \frac{90}{5}\right) = N(70, 18)$ に従う.

例 正規分布 $N(70, 90)$ に従う 5 個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 75)$ を求める.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(70, \frac{90}{5}\right) = N(70, 18)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - 70}{\sqrt{18}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

例 正規分布 $N(70, 90)$ に従う 5 個の確率変数 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数 $\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$ について, 確率 $P(\overline{X} \geq 75)$ を求める.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(70, \frac{90}{5}\right) = N(70, 18)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数

$$Z = \frac{\overline{X} - 70}{\sqrt{18}}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$\overline{X} \geq 75 \iff \frac{\overline{X} - 70}{\sqrt{18}} \geq \frac{75 - 70}{\sqrt{18}} \iff Z \geq \frac{5}{\sqrt{18}}.$$

標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geq 75) &= P\left(Z \geq \frac{5}{\sqrt{18}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{5}{\sqrt{18}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{18}}\right) \doteq 1 - \Phi(1.179) \doteq 1 - 0.88 \\ &= 0.12. \end{aligned}$$

終

問4.2 正規分布 $N(90, 112)$ に従う 7 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_7}{7}$$

について, 確率 $P(\overline{X} \leq 87)$ と $P(88 \leq \overline{X} \leq 95)$ とを求めよ.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N(\quad, \quad) = N(\quad, \quad)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - \quad}{\quad} = \frac{\overline{X} - \quad}{\quad}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\overline{X} \leq 87 \iff \frac{\overline{X} - \quad}{\quad} \leq \frac{87 - \quad}{\quad} \iff Z \leq \quad.$$

$$P(\overline{X} \leq \quad) = P(Z \leq \quad) = \Phi(\quad) = \quad \div \\ = \quad.$$

問4.2 正規分布 $N(90, 112)$ に従う 7 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_7}{7}$$

について, 確率 $P(\overline{X} \leq 87)$ と $P(88 \leq \overline{X} \leq 95)$ とを求めよ.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(90, \frac{112}{7}\right) = N(90, 16)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - 90}{\sqrt{16}} = \frac{\overline{X} - 90}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\overline{X} \leq 87 \iff \frac{\overline{X} - 90}{4} \leq \frac{87 - 90}{4} \iff Z \leq -\frac{3}{4}.$$

$$P(\overline{X} \leq 87) = P\left(Z \leq -\frac{3}{4}\right) = \Phi\left(-\frac{3}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{4}\right) \doteq 1 - 0.7897 = 0.2103.$$

問4.2 正規分布 $N(90, 112)$ に従う 7 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_7}{7}$$

について, 確率 $P(\overline{X} \leq 87)$ と $P(88 \leq \overline{X} \leq 95)$ とを求めよ.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(90, \frac{112}{7}\right) = N(90, 16)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - 90}{\sqrt{16}} = \frac{\overline{X} - 90}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\overline{X} \leq 87 \iff \frac{\overline{X} - 90}{4} \leq \frac{87 - 90}{4} \iff Z \leq -0.75 .$$

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \leq 87) &= P(Z \leq -0.75) = \Phi(-0.75) = 1 - \Phi(0.75) \doteq 1 - 0.7734 \\ &= 0.2266 . \end{aligned}$$

問4.2 正規分布 $N(90, 112)$ に従う 7 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_7}{7}$$

について, 確率 $P(\overline{X} \leq 87)$ と $P(88 \leq \overline{X} \leq 95)$ とを求めよ.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(90, \frac{112}{7}\right) = N(90, 16)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - 90}{\sqrt{16}} = \frac{\overline{X} - 90}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$88 \leq \overline{X} \leq 95 \iff \frac{88 - 90}{4} \leq \frac{\overline{X} - 90}{4} \leq \frac{95 - 90}{4} \iff \quad \leq Z \leq \quad .$$

$$P(88 \leq \overline{X} \leq 95) = P(\quad \leq Z \leq \quad) = \Phi(\quad) - \Phi(\quad)$$

$$= \quad \quad \quad \doteq$$

$$= \quad .$$

問4.2 正規分布 $N(90, 112)$ に従う 7 個の確率変数 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_7$ が互いに独立であるとする. これらの平均を表わす確率変数

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_7}{7}$$

について, 確率 $P(\overline{X} \leq 87)$ と $P(88 \leq \overline{X} \leq 95)$ とを求めよ.

確率変数 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(90, \frac{112}{7}\right) = N(90, 16)$ に従う. よって, $\overline{X}$ を標準化した確率変数 $Z = \frac{\overline{X} - 90}{\sqrt{16}} = \frac{\overline{X} - 90}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$88 \leq \overline{X} \leq 95 \iff \frac{88 - 90}{4} \leq \frac{\overline{X} - 90}{4} \leq \frac{95 - 90}{4} \iff -0.5 \leq Z \leq 1.25 .$$

$$\begin{aligned} P(88 \leq \overline{X} \leq 95) &= P(-0.5 \leq Z \leq 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(-0.5) \\ &= \Phi(1.25) - \{1 - \Phi(0.5)\} \doteq 0.8944 + 0.6915 - 1 \\ &= 0.5859 . \end{aligned}$$

終