

3.5 正規分布に関する確率の計算

前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 。

前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = f(x) .$$

前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = f(x) .$$

よって標準正規分布の確率密度関数は偶関数である。

定義域の各実数 x について $f(-x) = f(x)$ である関数 $f(x)$ を偶関数と
いった。

前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. 任意の実数 x について

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = f(x) .$$

よって標準正規分布の確率密度関数は偶関数である。

[定理] 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は偶関数である。

前節で述べたように、平均値が 0 であり分散が 1 である正規分布 $N(0,1)$ を標準正規分布という。その確率密度関数 $f(x)$ は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. 任意の実数 x について

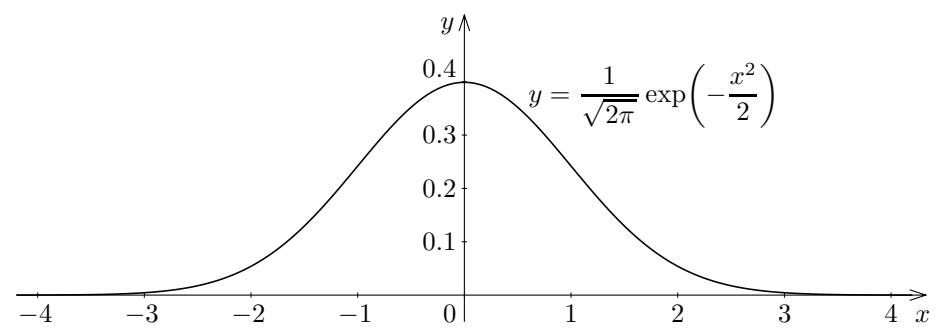
$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(-x)^2}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = f(x) .$$

よって標準正規分布の確率密度関数は偶関数である。

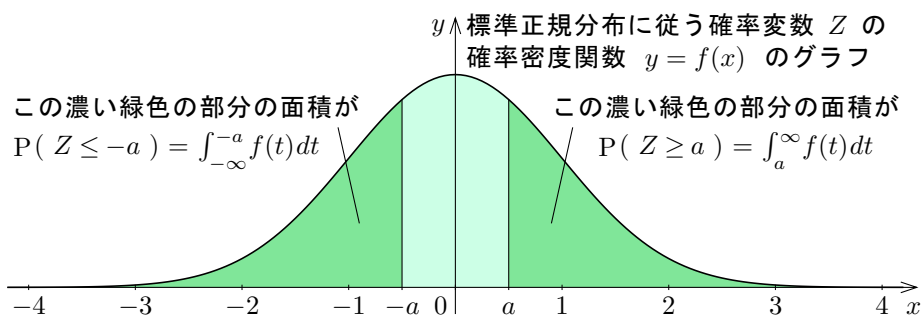
[定理] 標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は偶関数である。

これより、 xy 座標平面において標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ のグラフは y 軸に関して対称である。
 xy 座標平面において偶関数 $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である。

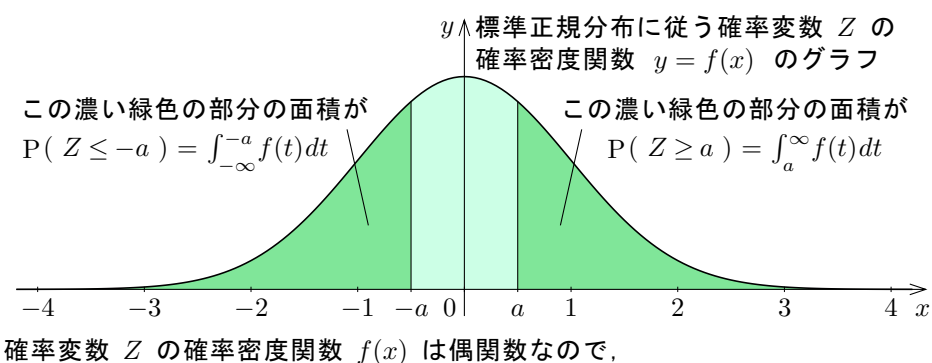
xy 座標平面において標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数
 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ のグラフは次のようになる.



標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数 $y = f(x)$ 及び任意の実数 a について次のようになる.



標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の確率密度関数 $y = f(x)$ 及び任意の実数 a について次のようになる。



$$P(Z \leq -a) = \int_{-\infty}^{-a} f(t) dt = \int_a^{\infty} f(t) dt = P(Z \geq a) ,$$

$$P(Z \geq -a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt = P(Z \leq a) .$$

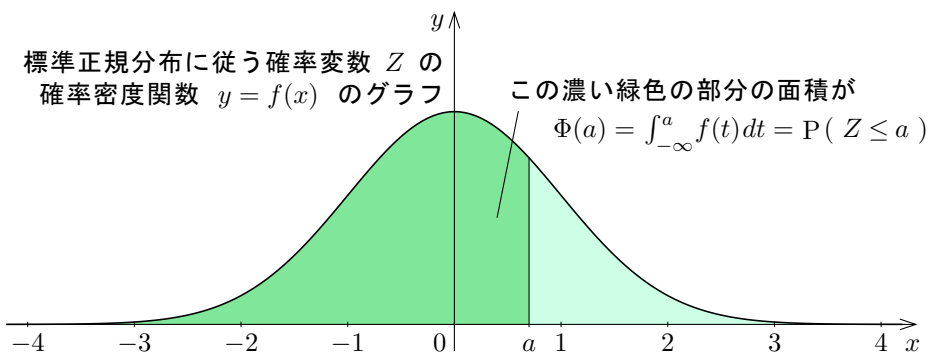
正規分布に従う確率変数に関する確率の計算を考える．標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．標準正規分布の確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ なので,

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

正規分布に従う確率変数に関する確率の計算を考える。標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。標準正規分布の確率密度関数は $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ なので、

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x)$ の図形的意味は次のようになる。



標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ について以下のことが成り立つ：

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ について以下のことが成り立つ：任意の実数 a について,

$$P(Z \leq a) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx ,$$

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ について以下のことが成り立つ：任意の実数 a について，

$$P(Z \leq a) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx ,$$

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

更にこれらのことより，

$$\Phi(-a) = P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数 $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ について以下のことが成り立つ：任意の実数 a について，

$$P(Z \leq a) = \Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx ,$$

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

更にこれらのことより，

$$\Phi(-a) = P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

任意の実数 a, b について， $a \leq b$ のとき，

$$P(a \leq Z \leq b) = P(Z \leq b) - P(Z \leq a) = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

これらの結果をまとめる.

[公式] 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく :

$$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt .$$

各実数 a について, $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$ であり,

$$P(Z \leq a) = \Phi(a) ,$$

$$P(Z \geq a) = 1 - \Phi(a) .$$

各実数 a, b について, $a \leq b$ のとき

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a) .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数

$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の値は初等的な関数の式で表せないで、 $\Phi(x)$ の値は計算機を用いた数値計算によって近似値が計算されて数値表にまとめられている。

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z の累積分布関数

$\Phi(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の値は初等的な関数の式で表せないので、 $\Phi(x)$ の値は計算機を用いた数値計算によって近似値が計算されて数値表にまとめられている。標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数の近似値の表を正規分布表という。正規分布表には、通常、0 以上の実数に対する標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数の近似値が記載されている。

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ について、例えば、以下の正規分布表で 0.68 における値 $\Phi(0.68)$ の近似値を調べると 0.7517 である。

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \leq 1.23)$ を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \leq 1.23)$ を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.23) = \Phi(1.23) \doteq 0.8907 .$$

終

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \leq -0.25)$ を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \leq -0.25)$ を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. 任意の実数 a について $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

$P(Z \leq -0.25) = \Phi(-0.25) = 1 - \Phi(0.25) \doteq 1 - 0.5987 = 0.4013$. **終**

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \geq -2.17)$ を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(Z \geq -2.17)$ を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. 任意の実数 a について $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

$$\begin{aligned} P(Z \geq -2.17) &= 1 - P(Z \leq -2.17) = 1 - \Phi(-2.17) \\ &= 1 - \{1 - \Phi(2.17)\} = \Phi(2.17) \\ &\doteq 0.9850 . \end{aligned}$$

終

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率 $P(-0.73 \leq Z \leq 1.46)$ を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について確率

$P(-0.73 \leq Z \leq 1.46)$ を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. 任意の実数 a について $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$.

$$\begin{aligned} P(-0.73 \leq Z \leq 1.46) &= \Phi(1.46) - \Phi(-0.73) = \Phi(1.46) - \{1 - \Phi(0.73)\} \\ &= \Phi(1.46) + \Phi(0.73) - 1 \doteq 0.9279 + 0.7673 - 1 \\ &= 0.6952 . \end{aligned}$$

終

問3.5.1

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、確率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$, $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \quad \quad \quad \doteq \quad \quad \quad .$$

問3.5.1

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, 確率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$, $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \Phi(1.74) \doteq 0.9591 .$$

$$P(Z \geq 0.79) = 1 - P(Z \leq 0.79) = \qquad \doteq \qquad = \qquad .$$

問3.5.1

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、確

率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$,
 $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \Phi(1.74) \doteq 0.9591 .$$

$$P(Z \geq 0.79) = 1 - P(Z \leq 0.79) = 1 - \Phi(0.79) \doteq 1 - 0.7852 = 0.2148 .$$

$$P(Z \leq -2.13) = \qquad = \qquad \doteq \qquad = \qquad .$$

問3.5.1

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について、確

率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$,
 $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \Phi(1.74) \doteq 0.9591 .$$

$$P(Z \geq 0.79) = 1 - P(Z \leq 0.79) = 1 - \Phi(0.79) \doteq 1 - 0.7852 = 0.2148 .$$

$$P(Z \leq -2.13) = \Phi(-2.13) = 1 - \Phi(2.13) \doteq 1 - 0.9834 = 0.0166 .$$

$$P(Z \geq -1.36) = 1 - P(Z \leq -1.36) =$$

$$=$$

$$\doteq .$$

問3.5.1 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, 確率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$, $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \Phi(1.74) \doteq 0.9591 .$$

$$P(Z \geq 0.79) = 1 - P(Z \leq 0.79) = 1 - \Phi(0.79) \doteq 1 - 0.7852 = 0.2148 .$$

$$P(Z \leq -2.13) = \Phi(-2.13) = 1 - \Phi(2.13) \doteq 1 - 0.9834 = 0.0166 .$$

$$P(Z \geq -1.36) = 1 - P(Z \leq -1.36) = 1 - \Phi(-1.36)$$

$$= 1 - \{1 - \Phi(1.36)\} = \Phi(1.36)$$

$$\doteq 0.9131 .$$

$$P(-0.87 \leq Z \leq 1.28) = \Phi(1.28) - \Phi(-0.87) =$$

$$= \qquad \qquad \qquad \doteq$$

$$= \qquad .$$

問3.5.1 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, 確率 $P(Z \leq 1.74)$, $P(Z \geq 0.79)$, $P(Z \leq -2.13)$, $P(Z \geq -1.36)$, $P(-0.87 \leq Z \leq 1.28)$ を求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \leq 1.74) = \Phi(1.74) \doteq 0.9591 .$$

$$P(Z \geq 0.79) = 1 - P(Z \leq 0.79) = 1 - \Phi(0.79) \doteq 1 - 0.7852 = 0.2148 .$$

$$P(Z \leq -2.13) = \Phi(-2.13) = 1 - \Phi(2.13) \doteq 1 - 0.9834 = 0.0166 .$$

$$P(Z \geq -1.36) = 1 - P(Z \leq -1.36) = 1 - \Phi(-1.36)$$

$$= 1 - \{1 - \Phi(1.36)\} = \Phi(1.36)$$

$$\doteq 0.9131 .$$

$$P(-0.87 \leq Z \leq 1.28) = \Phi(1.28) - \Phi(-0.87) = \Phi(1.28) - \{1 - \Phi(0.87)\}$$

$$= \Phi(1.28) + \Phi(0.87) - 1 \doteq 0.8997 + 0.8078 - 1$$

$$= 0.7075 .$$

終

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ について、与えられた実数 p ($0 < p < 1$) に対して $\Phi(x) = p$ となる x の近似値を知りたいときがある． Φ の逆関数 Φ^{-1} を考えると、逆関数の一般的な性質により次のことが成り立つ：

$$\Phi(x) = p \iff x = \Phi^{-1}(p) .$$

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ の近似値を求めるためには正規分布表を逆に引く.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ の逆関数 $\Phi^{-1}(x)$ の近似値を求めるためには正規分布表を逆に引く．例えば，以下の正規分布表で $\Phi^{-1}(0.791)$ の近似値を調べると 0.81 である．

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7793	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq a) = 0.975$ である実数 a を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq a) = 0.975$ である実数 a を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq a) = 0.975$ である実数 a を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(a) = P(Z \leq a) = 0.975 ,$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq a) = 0.975$ である実数 a を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(a) = P(Z \leq a) = 0.975 ,$$

$$a = \Phi^{-1}(0.975) \doteq 1.96 .$$

終

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.305 .$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$

である実数 b を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.305,$$

$\Phi(b) < \frac{1}{2}$ となるときは $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) > \frac{1}{2}$ を考える.

$$\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) = 1 - 0.305 = 0.695,$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.305 .$$

$\Phi(b) < \frac{1}{2}$ となるときは $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) > \frac{1}{2}$ を考える.

$$\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) = 1 - 0.305 = 0.695 ,$$

$$-b \doteq \Phi^{-1}(0.695) \doteq 0.51 ,$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \leq b) = 0.305$ である実数 b を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.305 ,$$

$\Phi(b) < \frac{1}{2}$ となるときは $\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) > \frac{1}{2}$ を考える.

$$\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) = 1 - 0.305 = 0.695 ,$$

$$-b \doteq \Phi^{-1}(0.695) \doteq 0.51 ,$$

$$b \doteq -0.51 .$$

終

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq c) = 1 - P(Z \leq c) = 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) .$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq c) = 1 - P(Z \leq c) = 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) .$$

$P(Z \geq c) = 0.67$ なので,

$$\Phi(-c) = 0.67 ,$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq c) = 1 - P(Z \leq c) = 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) .$$

$P(Z \geq c) = 0.67$ なので,

$$\Phi(-c) = 0.67 ,$$

$$-c = \Phi^{-1}(0.67) \doteq 0.44 ,$$

例 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について, $P(Z \geq c) = 0.67$ である実数 c を求める.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq c) = 1 - P(Z \leq c) = 1 - \Phi(c) = \Phi(-c) .$$

$P(Z \geq c) = 0.67$ なので,

$$\Phi(-c) = 0.67 ,$$

$$-c = \Phi^{-1}(0.67) \doteq 0.44 ,$$

$$c \doteq -0.44 .$$

終

問3.5.2 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について,
 $P(Z \geq a) = 0.166$ である実数 a 及び $P(Z \leq b) = 0.063$ である実数 b を
 求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq a) =$$

$$P(Z \geq a) = 0.166 \text{ なので}$$

$$= 0.166$$

$$\Phi(a) =$$

$$a =$$

$$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.063 \text{ なので,}$$

$$\Phi(-b) =$$

$$-b =$$

$$b \doteq$$

問3.5.2 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について,
 $P(Z \geq a) = 0.166$ である実数 a 及び $P(Z \leq b) = 0.063$ である実数 b を
求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

$P(Z \geq a) = 0.166$ なので

$$1 - \Phi(a) = 0.166 ,$$

$$\Phi(a) = 1 - 0.166 = 0.834 ,$$

$$a = \Phi^{-1}(0.834) \doteq 0.97 .$$

$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.063$ なので,

$$\Phi(-b) =$$

$$-b =$$

$$b \doteq$$

問3.5.2 標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 Z について,
 $P(Z \geq a) = 0.166$ である実数 a 及び $P(Z \leq b) = 0.063$ である実数 b を
求めよ.

標準正規分布 $N(0,1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a) = 1 - \Phi(a) .$$

$P(Z \geq a) = 0.166$ なので

$$1 - \Phi(a) = 0.166 ,$$

$$\Phi(a) = 1 - 0.166 = 0.834 ,$$

$$a = \Phi^{-1}(0.834) \doteq 0.97 .$$

$\Phi(b) = P(Z \leq b) = 0.063$ なので,

$$\Phi(-b) = 1 - \Phi(b) = 1 - 0.063 = 0.937 ,$$

$$-b = \Phi^{-1}(0.937) \doteq 1.53 ,$$

$$b \doteq -1.53 .$$

終

標準正規分布でない正規分布に関する確率を計算するには、標準正規分布に関する確率に変換する。

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, 定数 a について,

$$X \leq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma},$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, 定数 a について,

$$X \leq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma},$$

よって

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, 定数 a について,

$$X \geq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma},$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, 定数 a について,

$$X \geq a \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{a - \mu}{\sigma} \iff Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma},$$

よって

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, $a \leq b$ である定数 a, b について,

$$a \leq X \leq b \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma} \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma},$$

定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数を Z とおく: $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数である. 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\sigma > 0$ なので, $a \leq b$ である定数 a, b について,

$$a \leq X \leq b \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma} \iff \frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma},$$

よって

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

このように、正規分布に従う確率変数 X に関する確率は標準正規分布の累積分布関数 Φ を用いて計算できる

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 73)$ を求める.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 73)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 73)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X \geq 73 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{73 - 70}{5} \iff Z \geq 0.6 \quad .$$

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 73)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X \geq 73 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{73 - 70}{5} \iff Z \geq 0.6 \quad .$$

標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\Phi(0.6) \doteq 0.7257$ なので,

$$\begin{aligned} P(X \geq 73) &= P(Z \geq 0.6) = 1 - P(Z \leq 0.6) = 1 - \Phi(0.6) \doteq 1 - 0.7257 \\ &= 0.2743 \quad . \end{aligned}$$

終

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 62)$ を求める.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 62)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 62)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X \geq 62 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{62 - 70}{5} \iff Z \geq -1.6 .$$

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(X \geq 62)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$X \geq 62 \iff \frac{X - 70}{5} \geq \frac{62 - 70}{5} \iff Z \geq -1.6 .$$

標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\Phi(1.6) \doteq 0.9452$ なので,

$$\begin{aligned} P(X \geq 62) &= P(Z \geq -1.6) = 1 - P(Z \leq -1.6) \\ &= 1 - \Phi(-1.6) = 1 - \{1 - \Phi(1.6)\} = \Phi(1.6) \\ &\doteq 0.9452 . \end{aligned}$$

終

例 正規分布 $N(70,25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(66 \leq X \leq 77)$ を求める.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(66 \leq X \leq 77)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(66 \leq X \leq 77)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$66 \leq X \leq 77 \iff \frac{66 - 70}{5} \leq \frac{X - 70}{5} \leq \frac{77 - 70}{5} \iff -0.8 \leq Z \leq 1.4 .$$

例 正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X について確率 $P(66 \leq X \leq 77)$ を求める.

正規分布 $N(70, 25)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数

$$Z = \frac{X - 70}{\sqrt{25}} = \frac{X - 70}{5}$$

は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

$$66 \leq X \leq 77 \iff \frac{66 - 70}{5} \leq \frac{X - 70}{5} \leq \frac{77 - 70}{5} \iff -0.8 \leq Z \leq 1.4 .$$

標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく. $\Phi(1.4) \doteq 0.9192$,

$\Phi(0.8) \doteq 0.7881$ なので,

$$\begin{aligned} P(66 \leq X \leq 77) &= P(-0.8 \leq Z \leq 1.4) = \Phi(1.4) - \Phi(-0.8) \\ &= \Phi(1.4) - \{1 - \Phi(0.8)\} = \Phi(1.4) + \Phi(0.8) - 1 \\ &\doteq 0.9192 + 0.7881 - 1 \\ &= 0.7073 . \end{aligned}$$

終

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であると

する. 確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする.

確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする.

確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$X \geq 58 \iff \frac{X - 53}{4} \geq \frac{58 - 53}{4} \iff Z \geq \frac{5}{4}.$$

よって

$$P(X \geq 58) = P(Z \geq \frac{5}{4}) = 1 - \Phi(\frac{5}{4}) \doteq 1 - 0.9505 = 0.0495.$$

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする.

確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$X \geq 58 \iff \frac{X - 53}{4} \geq \frac{58 - 53}{4} \iff Z \geq 1.25 .$$

よって

$$P(X \geq 58) = P(Z \geq 1.25) = 1 - \Phi(1.25) \doteq 1 - 0.8944 = 0.1056 .$$

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする.

確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$X \geq 50 \iff \frac{X - 53}{4} \geq \frac{50 - 53}{4} \iff Z \geq -\frac{3}{4}.$$

よって

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &= P(Z \geq -\frac{3}{4}) = 1 - P(Z \leq -\frac{3}{4}) \\ &= 1 - \Phi(-\frac{3}{4}) = 1 - \{1 - \Phi(\frac{3}{4})\} = \Phi(\frac{3}{4}) \\ &\doteq 0.7983. \end{aligned}$$

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であると

する. 確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$X \geq 50 \iff \frac{X - 53}{4} \geq \frac{50 - 53}{4} \iff Z \geq -0.75 .$$

よって

$$\begin{aligned} P(X \geq 50) &= P(Z \geq -0.75) = 1 - P(Z \leq -0.75) \\ &= 1 - \Phi(-0.75) = 1 - \{1 - \Phi(0.75)\} = \Phi(0.75) \\ &\doteq 0.7734 . \end{aligned}$$

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であるとする.

確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$46 \leq X \leq 56 \iff \frac{46 - 53}{4} \leq \frac{X - 53}{4} \leq \frac{56 - 53}{4} \\ \iff \quad \leq Z \leq \quad .$$

よって

$$\begin{aligned} P(46 \leq X \leq 56) &= P(\quad \leq Z \leq \quad) = \Phi(\quad) - \Phi(\quad) \\ &= \Phi(\quad) - \{1 - \Phi(\quad)\} = \Phi(\quad) + \Phi(\quad) - 1 \\ &\doteq \\ &= \quad . \end{aligned}$$

問3.5.3 正規分布に従う確率変数 X の平均値は 53 で分散は 16 であると

する. 確率 $P(X \geq 58)$, $P(X \geq 50)$, $P(46 \leq X \leq 56)$ を求めよ.

正規分布 $N(53, 16)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 53}{4}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う. 標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく.

$$\begin{aligned} 46 \leq X \leq 56 &\iff \frac{46 - 53}{4} \leq \frac{X - 53}{4} \leq \frac{56 - 53}{4} \\ &\iff -1.75 \leq Z \leq 0.75 . \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} P(46 \leq X \leq 56) &= P(-1.75 \leq Z \leq 0.75) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.75) \\ &= \Phi(0.75) - \{1 - \Phi(1.75)\} = \Phi(0.75) + \Phi(1.75) - 1 \\ &\doteq 0.5734 + 0.9599 - 1 \\ &= 0.7333 . \end{aligned}$$

終

ある量を表す変数が確率変数で確率分布 $\mathcal{P}$ に従うとき、その量は確率分布 $\mathcal{P}$ に従うという.

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm ）は正規分布に従うものとする。
19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする。19 歳男子について、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める。

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする．
19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする． 19 歳男子について，背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める．
全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である． $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい．

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする。19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする。19 歳男子について、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める。

全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - \text{平均値}}{\text{標準偏差}}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする。19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする。19 歳男子について、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める。

全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 171}{6}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする．
19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする． 19 歳男子について，背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める．
全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である． $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい． X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 171}{6}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う． 標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．
$$X \geq a \iff \frac{X - 171}{6} \geq \frac{a - 171}{6} \iff Z \geq \frac{a - 171}{6} .$$

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする．
19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする．19 歳男子について，背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める．

全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である． $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい． X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 171}{6}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う．標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく．

$$X \geq a \iff \frac{X - 171}{6} \geq \frac{a - 171}{6} \iff Z \geq \frac{a - 171}{6} .$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) .$$

例 全国の 19 歳男子の身長（単位は cm）は正規分布に従うものとする。
19 歳男子の身長の平均値は 171cm であり標準偏差は 6cm であるとする。19 歳男子について、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長を求める。

全国の 19 歳男子の中から無作為に選んだ人の身長（単位は cm）を表す変数 X は正規分布 $N(171, 6^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 10\%$ である実数 a を求めればよい。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 171}{6}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。標準正規分布 $N(0, 1)$ の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$X \geq a \iff \frac{X - 171}{6} \geq \frac{a - 171}{6} \iff Z \geq \frac{a - 171}{6} .$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{a - 171}{6}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) .$$

$P(X \geq a) = 10\% = 0.1$ なので、

$$1 - \Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) = 0.1 ,$$

$$\Phi\left(\frac{a - 171}{6}\right) = 1 - 0.1 = 0.9 ,$$

$$\frac{a - 171}{6} = \Phi^{-1}(0.9) \doteq 1.28 ,$$

$$a \doteq 1.28 \times 6 + 171 = 178.68 .$$

従って、背が高い方から 10% 以内に入るための最低の身長は約 178.7cm である。

終

問3.5.4 ある試験の点数は正規分布に従い、平均点が 63 であり標準偏差が 11 であるとする。この試験において上位 20% 以内に入るための最低点を求めよ。

この試験の受験者の中から無作為に選んだ人の点数を表す変数 X は正規分布 $N(\quad, \quad^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 20\%$ である実数 a を求める。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - \quad}{\quad}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う。標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$X \geq a \iff \frac{X - \quad}{\quad} \geq \frac{a - \quad}{\quad} \iff Z \geq \frac{a - \quad}{\quad} .$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - \quad}{\quad}\right) =$$

$$P(X \geq a) = 20\% = 0.2 \text{ なので,} \\ \qquad \qquad \qquad = 0.2 ,$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a - \quad}{\quad}\right) &= \\ \frac{a - \quad}{\quad} &= \qquad \qquad \qquad , \\ a &\doteq \qquad \times \quad + \quad = \quad . \end{aligned}$$

問3.5.4 ある試験の点数は正規分布に従い、平均点が 63 であり標準偏差が 11 であるとする。この試験において上位 20% 以内に入るための最低点を求めよ。

この試験の受験者の中から無作為に選んだ人の点数を表す変数 X は正規分布 $N(63, 11^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 20\%$ である実数 a を求める。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 63}{11}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$X \geq a \iff \frac{X - 63}{11} \geq \frac{a - 63}{11} \iff Z \geq \frac{a - 63}{11} .$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 63}{11}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - 63}{11}\right) .$$

$$P(X \geq a) = 20\% = 0.2 \text{ なので,} \\ = 0.2 ,$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a -}{ }\right) &= \\ \frac{a - }{ } &= , \\ a \doteq &\times + = . \end{aligned}$$

問3.5.4 ある試験の点数は正規分布に従い、平均点が 63 であり標準偏差が 11 であるとする。この試験において上位 20% 以内に入るための最低点を求めよ。

この試験の受験者の中から無作為に選んだ人の点数を表す変数 X は正規分布 $N(63, 11^2)$ に従う確率変数である。 $P(X \geq a) = 20\%$ である実数 a を求める。 X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - 63}{11}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。標準正規分布の累積分布関数を $\Phi(x)$ とおく。

$$X \geq a \iff \frac{X - 63}{11} \geq \frac{a - 63}{11} \iff Z \geq \frac{a - 63}{11} .$$

$$P(X \geq a) = P\left(Z \geq \frac{a - 63}{11}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a - 63}{11}\right) .$$

$P(X \geq a) = 20\% = 0.2$ なので、

$$1 - \Phi\left(\frac{a - 63}{11}\right) = 0.2 ,$$

$$\Phi\left(\frac{a - 63}{11}\right) = 1 - 0.2 = 0.8 ,$$

$$\frac{a - 63}{11} = \Phi^{-1}(0.8) \doteq 0.84 ,$$

$$a \doteq 0.84 \times 11 + 63 = 72.24 .$$

故に、この試験において上位から 20% 以内に入るための最低点は 73 点である。

終