

3.4 正規分布

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ を底とする指数関数の実数 X における値 e^X を $\exp X$ のようにも書き表す.

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなようになるか考える.

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなようになるか考える. 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおく.

$$E[X] = \frac{n}{2} \ , \quad V[X] = \frac{n}{4} \ .$$

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなになるか考える. 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおく.

$$E[X] = \frac{n}{2}, \quad V[X] = \frac{n}{4}.$$

n が大きくなるに連れて $E[X]$ も $V[X]$ も大きくなる.

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなになるか考える. 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおく.

$$E[X] = \frac{n}{2}, \quad V[X] = \frac{n}{4}.$$

n が大きくなるに連れて $E[X]$ も $V[X]$ も大きくなる. これでは考えにくいので, 平均値と分散とが一定になるように, X を標準化した確率変数 T を考える:

$$T = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}.$$

自然数 n を大きくしていくときに 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (に基づく分布) がどのようなになるか考える. 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を X とおく.

$$E[X] = \frac{n}{2}, \quad V[X] = \frac{n}{4}.$$

n が大きくなるに連れて $E[X]$ も $V[X]$ も大きくなる. これでは考えにくいので, 平均値と分散とが一定になるように, X を標準化した確率変数 T を考える:

$$T = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}.$$

$E[T] = 0$, $\sigma[T] = 1$. 確率変数 $T = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}$ の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は n の値とは無関係に一定である.

$n = 4$ とする. 2 項分布 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 T は $T = \frac{2X - 4}{\sqrt{4}} = X - 2$, よって $X = T + 2$. これより,

$$P(T = -2) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} ,$$

$$P(T = -1) = P(X = 1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} ,$$

$$P(T = 0) = P(X = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} ,$$

$$P(T = 1) = P(X = 3) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} ,$$

$$P(T = 2) = P(X = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} .$$

$n = 4$ とする. 2 項分布 $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数 X を標準化した確率変数 T は $T = \frac{2X-4}{\sqrt{4}} = X-2$, よって $X = T+2$. これより,

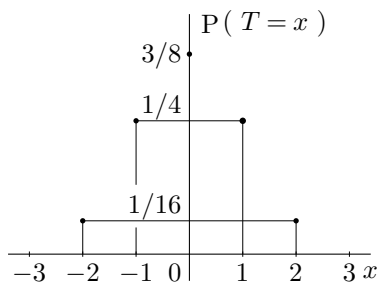
$$P(T = -2) = P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} ,$$

$$P(T = -1) = P(X = 1) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} ,$$

$$P(T = 0) = P(X = 2) = {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8} ,$$

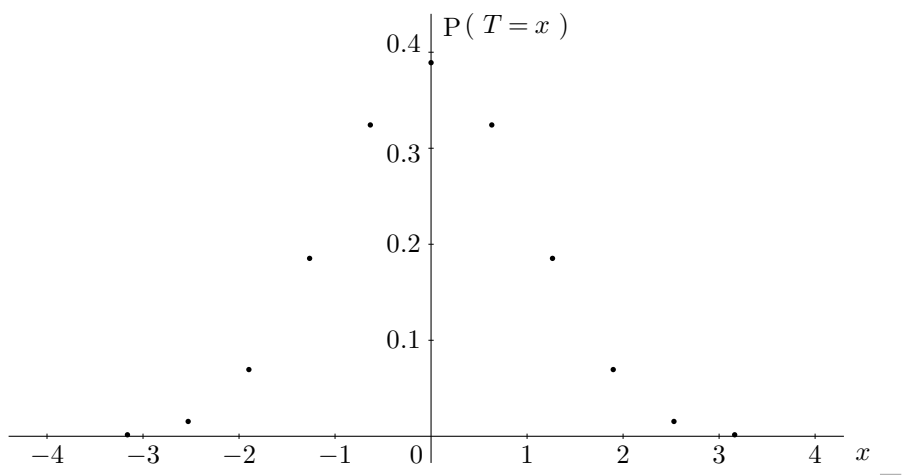
$$P(T = 1) = P(X = 3) = {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} ,$$

$$P(T = 2) = P(X = 4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} .$$

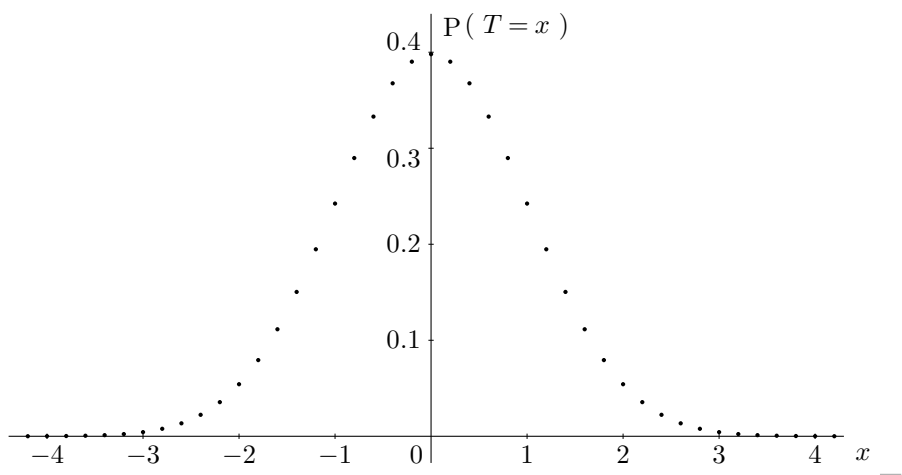


確率変数 T がとる値の確率のグラフは右上の図のようになる.

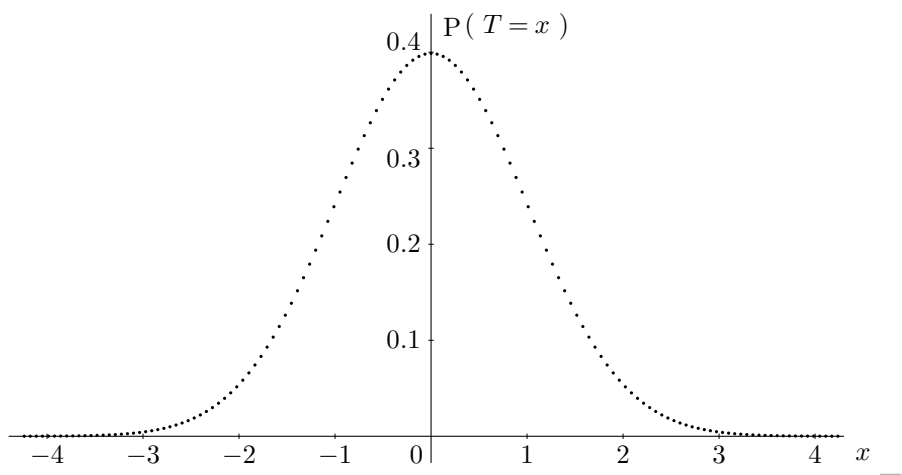
同様にして 2 項分布 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数とする値の確率のグラフを描く。



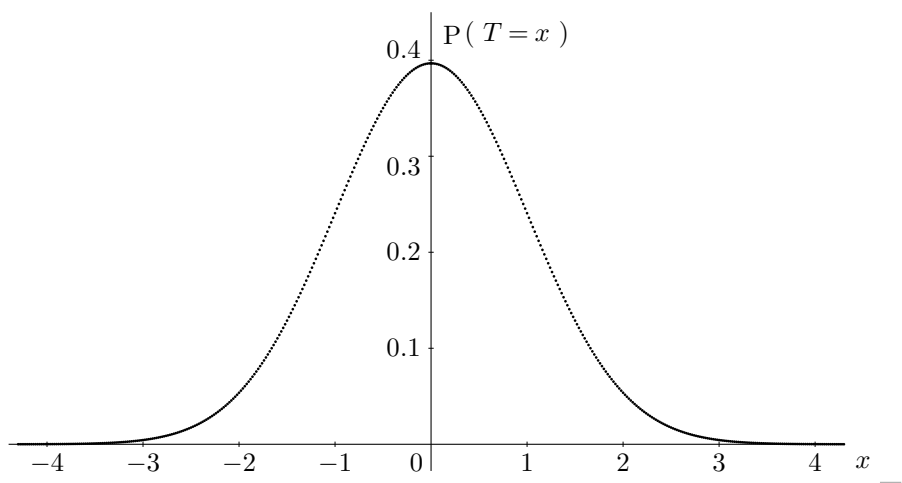
同様にして 2 項分布 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数がとる値の確率のグラフを描く.



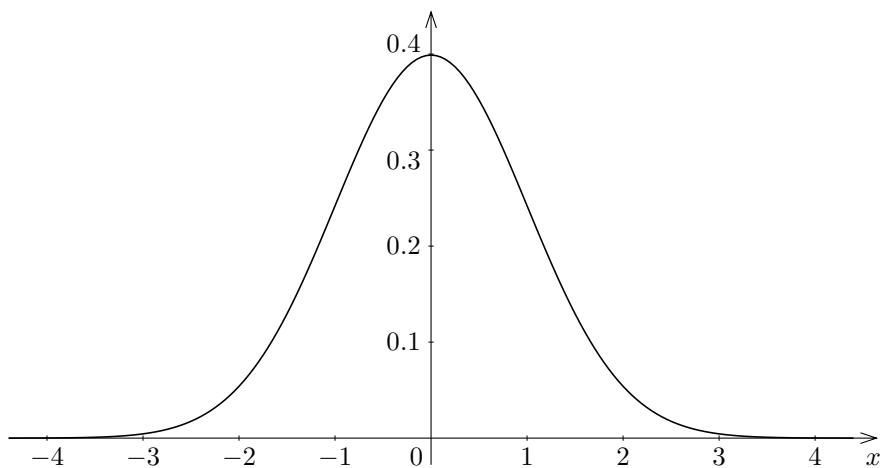
同様にして 2 項分布 $B\left(1000, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数がとる値の確率のグラフを描く.



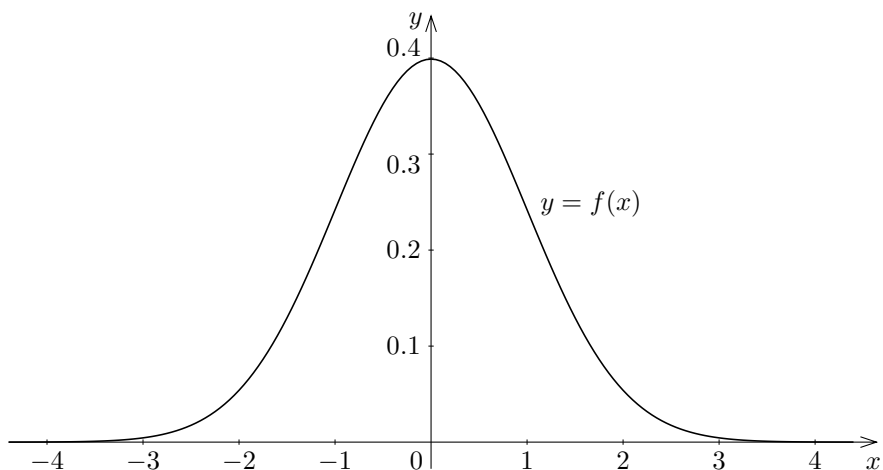
同様にして 2 項分布 $B\left(10000, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数がとる値の確率のグラフを描く.



変数 n の値を限りなく大きくすると 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数がとる値の確率のグラフは下図の曲線に限りなく近づく。



変数 n の値を限りなく大きくすると 2 項分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ に従う確率変数を標準化した確率変数がとる値の確率のグラフは下図の曲線に限りなく近づく.



この曲線をグラフとする関数 $f(x)$ は次の式で表せる：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) .$$

この関数 $f(x)$ を確率密度関数とする確率分布を標準正規分布という.

標準正規分布を一般化した正規分布を定義する.

[定理] 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 各実数 x について

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} > 0 \quad \text{で,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 .$$

標準正規分布を一般化した正規分布を定義する.

[定理] 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 各実数 x について

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} > 0 \quad \text{で,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 .$$

この定理より, 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 変数 x の関数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{は確率変数の確率密度関数である.}$$

標準正規分布を一般化した正規分布を定義する.

[定理] 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 各実数 x について

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} > 0 \quad \text{で,}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = 1 .$$

この定理より, 定数 μ, σ が実数で $\sigma > 0$ であるとき, 変数 x の関数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad \text{は確率変数の確率密度関数である.}$$

[定義] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとは, X の確率密度関数 $f(x)$ が次のように与えられることである:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} .$$

[定理 3.4.1] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は,

$$E[X] = \mu, \quad V[X] = \sigma^2.$$

[定理 3.4.1] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う確率変数 X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ は,

$$E[X] = \mu, \quad V[X] = \sigma^2.$$

このように, 定数 μ 及び正の定数 σ に対して, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ におけるパラメータ μ は平均値で σ^2 は分散である.

定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とする. このとき, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とする. このとき, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

これは標準正規分布の確率密度関数である. よって, 標準正規分布は平均値が 0 であり標準偏差が 1 である正規分布 $N(0, 1)$ である.

定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とする. このとき, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

これは標準正規分布の確率密度関数である. よって, 標準正規分布は平均値が 0 であり標準偏差が 1 である正規分布 $N(0, 1)$ である.

定数 μ 及び正の定数 σ に対して, 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, X の平均値は $E[X] = \mu$ で標準偏差は $\sigma[X] = \sigma$ なので, X を標準化した確率変数 Z は

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

定数 μ 及び正の定数 σ に対する正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ において, $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ とする. このとき, 正規分布 $N(\mu, \sigma^2) = N(0, 1)$ の確率密度関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

これは標準正規分布の確率密度関数である. よって, 標準正規分布は平均値が 0 であり標準偏差が 1 である正規分布 $N(0, 1)$ である.

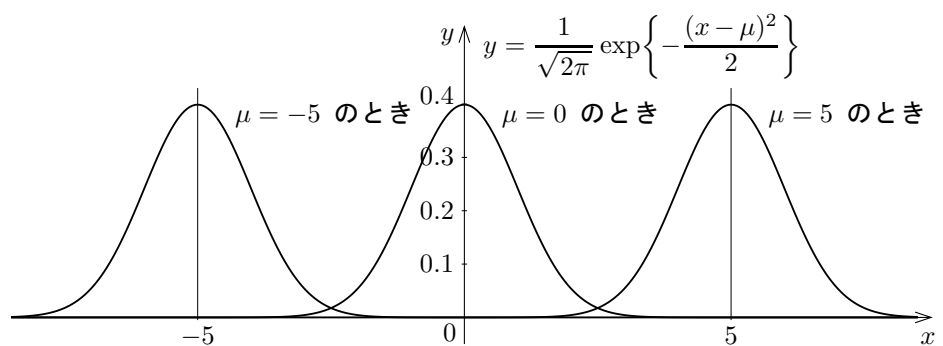
定数 μ 及び正の定数 σ に対して, 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, X の平均値は $E[X] = \mu$ で標準偏差は $\sigma[X] = \sigma$ なので, X を標準化した確率変数 Z は

$$Z = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]} = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

この標準化された確率変数 Z は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

[定理 3.4.2] 定数 μ, σ は実数で $\sigma > 0$ とする. 確率変数 X が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うならば, X を標準化した確率変数 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う.

正規分布の確率密度関数のグラフを描く。実数 μ について $\mu = -5, 0, 5$ のとき、分散が 1 の正規分布 $N(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフは次のようになる。



正規分布 $N(\mu, 1)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}$ のグラフ

実数 σ について $\sigma = \frac{1}{2}, 1, 2$ のとき, 平均値が 0 の正規分布 $N(0, \sigma^2)$ の確率密度関数 $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ のグラフは次のようになる.

