

離散型確率変数 X がとり得る値 x に確率 $P(X=x)$ を対応させる関数
や、連続型確率変数 X の確率密度関数を、 X の確率分布という。

3.1 2 項分布

2 項定理といわれる定理があつた：自然数 n 及び数 a と b に対して，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + \\ &\quad {}_nC_{n-3}a^3b^{n-3} + {}_nC_{n-2}a^2b^{n-2} + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\ &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_ka^{n-k}b^k) .\end{aligned}$$

自然数 n 及び n 以下の自然数 k に対して， n 個の対象の中から k 個の対象を選ぶ組合わせの総数 ${}_nC_k$ は

$$\begin{aligned}{}_nC_k &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\cdots(n-1)\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k} , \\ {}nC_k &= {}nC_{n-k} .\end{aligned}$$

2 項定理といわれる定理があつた：自然数 n 及び数 a と b とに対して，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + \\ &\quad {}_nC_{n-3}a^3b^{n-3} + {}_nC_{n-2}a^2b^{n-2} + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\ &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_ka^{n-k}b^k) .\end{aligned}$$

実数 p に対して， $a = 1-p$, $b = p$ とする．

$$(1-p+p)^n = \sum_{k=0}^n \{ {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \} .$$

2 項定理といわれる定理があつた：自然数 n 及び数 a と b に対して，

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + {}_nC_3a^{n-3}b^3 + \cdots + \\ &\quad {}_nC_{n-3}a^3b^{n-3} + {}_nC_{n-2}a^2b^{n-2} + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n \\ &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_ka^{n-k}b^k) .\end{aligned}$$

実数 p に対して， $a = 1-p$, $b = p$ とする．

$$(1-p+p)^n = \sum_{k=0}^n \{ {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \} .$$

この等式の左辺は $(1-p+p)^n = 1^n = 1$ なので，

$$\sum_{k=0}^n \{ {}_nC_kp^k(1-p)^{n-k} \} = 1 .$$

2 項定理といわれる定理があつた：自然数 n 及び数 a と b に対して、

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= {}_nC_0 a^n + {}_nC_1 a^{n-1} b + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + {}_nC_3 a^{n-3} b^3 + \cdots + \\ &\quad {}_nC_{n-3} a^3 b^{n-3} + {}_nC_{n-2} a^2 b^{n-2} + {}_nC_{n-1} a b^{n-1} + {}_nC_n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n ({}_nC_k a^{n-k} b^k) .\end{aligned}$$

実数 p に対して、 $a = 1-p$, $b = p$ とする.

$$(1-p+p)^n = \sum_{k=0}^n \{ {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \} .$$

この等式の左辺は $(1-p+p)^n = 1^n = 1$ なので、

$$\sum_{k=0}^n \{ {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \} = 1 .$$

このことより、 $0 \leq p \leq 1$ のとき、 0 以上 n 以下の各自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2, n-1, n$ に対して $P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ となる離散型確率変数ができる.

[定義] 定数 n は自然数で, 定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする. 確率変数 X が 2 項分布 $B(n, p)$ に従うとは, X がとり得る値が n 以下の自然数 $0, 1, 2, 3, \dots, n$ であり, n 以下の各自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ に対して

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1 - p)^{n - k}$$

となることである.

試行の反復について次の定理が成り立った.

[定理] 試行 T において事象 A が起きる確率が p であるとする. 自然数 n, k について $k \leq n$ とする. 試行 T を独立に n 回行うという試行において, 事象 A が起きる回数が丁度 k になる確率は ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ である.

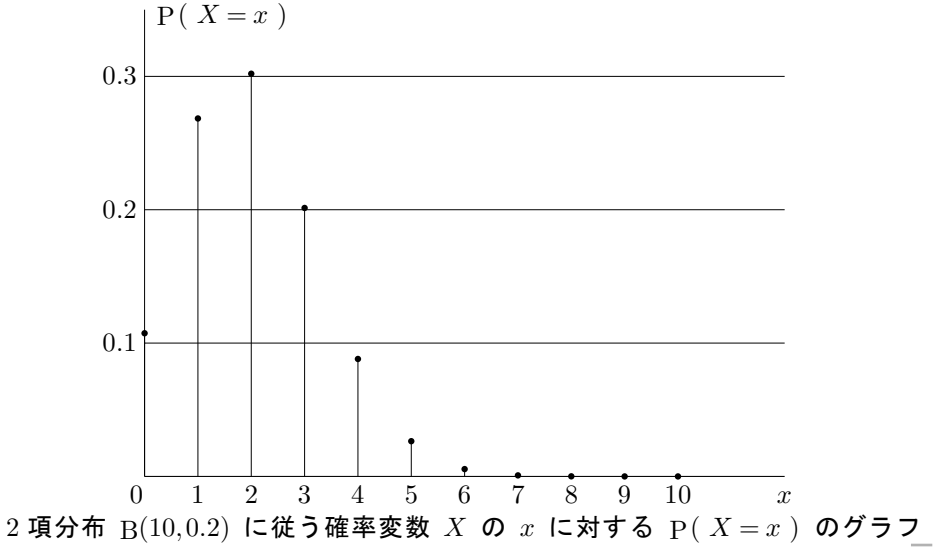
試行の反復について次の定理が成り立った.

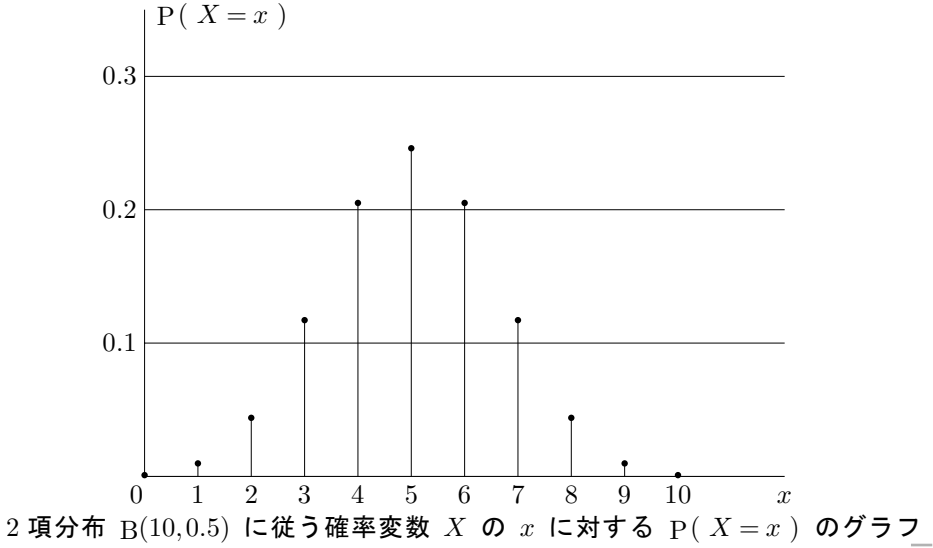
[定理] 試行 T において事象 A が起きる確率が p であるとする. 自然数 n, k について $k \leq n$ とする. 試行 T を独立に n 回行うという試行において, 事象 A が起きる回数が丁度 k になる確率は ${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$ である.

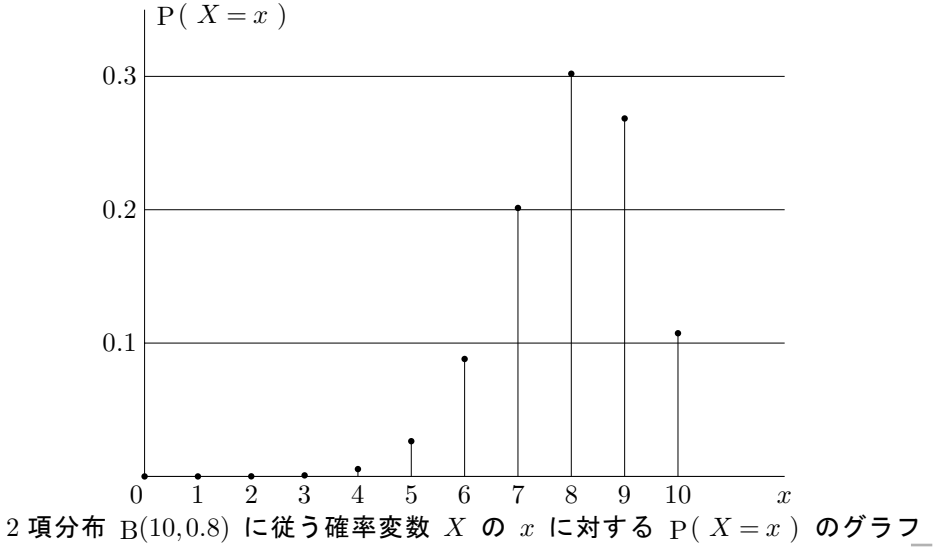
この定理より直ぐに次のことが分かる.

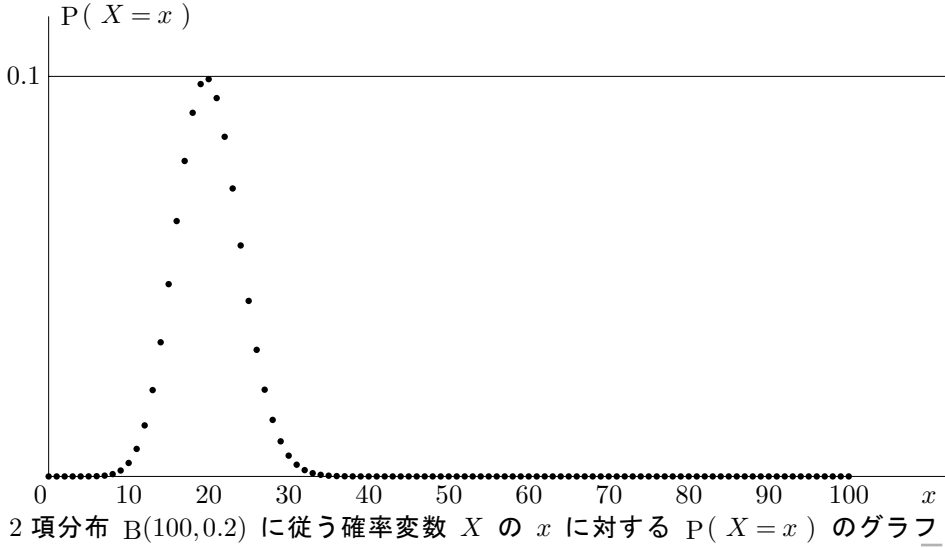
[定理] 定数 n は自然数で, 定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする. 試行 T において事象 A が起きる確率が p であるとする. この試行 T を独立に n 回行うとき, T の n 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数を X とおくと, X は確率変数であり, 2 項分布 $B(n, p)$ に従う.

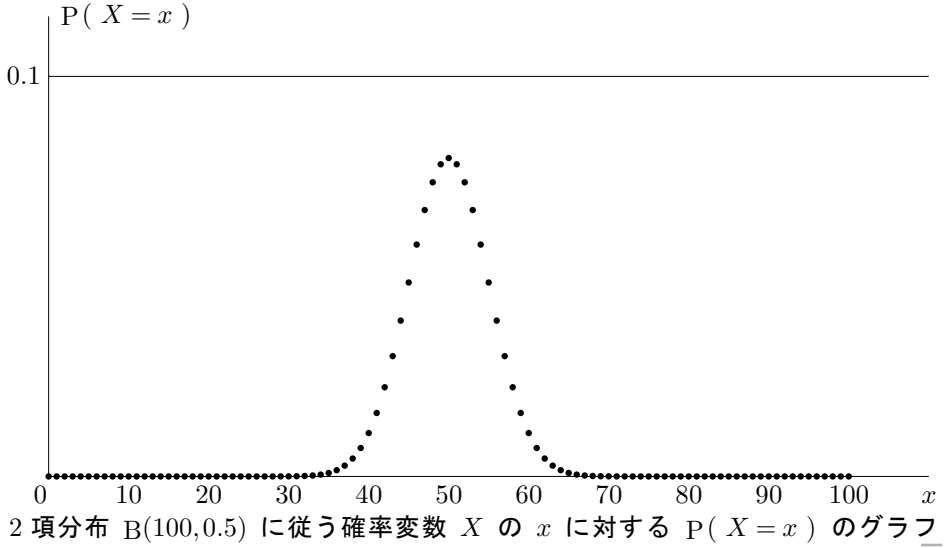
2 項分布に従う確率変数 X について、実数 x に対する確率 $P(X = x)$ のグラフは次のようになる.

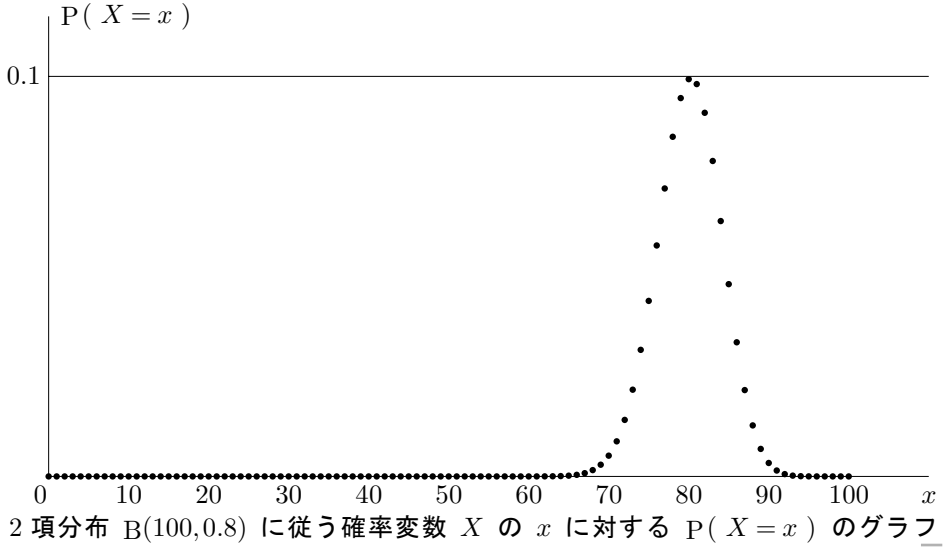












2 項分布の平均値と分散とは次のようになる.

[定理] 定数 n は自然数で, 定数 p は実数で $0 \leq p \leq 1$ とする. 確率変数 X が 2 項分布 $B(n, p)$ に従うならば, X は離散型確率変数であり, X の平均値 $E[X]$ と分散 $V[X]$ とは,

$$E[X] = np, \quad V[X] = np(1-p).$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ を求める.

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする．この試行を独立に 4 回行うとき，この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ を求める．
確率変数 X は 2 項分布 $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ に従うので，

$$E[X] = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \, , \qquad V[X] = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} \, .$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{5}{2}\right) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \end{aligned}$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{5}{2}\right) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= {}_4C_1 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{2}{3} + {}_4C_0 \cdot \frac{1}{3^4} = 4 \cdot \frac{2}{3^4} + 1 \cdot \frac{1}{3^4} \end{aligned}$$

自然数 n, k について, $k \leq n$ のとき,

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3) \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k},$$
$${}_nC_k = {}_nC_{n-k}.$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P\left(X \geq \frac{5}{2}\right) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= {}_4C_1 \cdot \frac{1}{3^3} \cdot \frac{2}{3} + {}_4C_0 \cdot \frac{1}{3^4} = 4 \cdot \frac{2}{3^4} + 1 \cdot \frac{1}{3^4} \\ &= \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq \sqrt{11}) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \end{aligned}$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq \sqrt{11}) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= 4 \cdot \frac{2^3}{3^4} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{3^4} + 4 \cdot \frac{2}{3^5} \end{aligned}$$

自然数 n, k について, $k \leq n$ のとき,

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3) \cdots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (k-1) \cdot k},$$

$${}_nC_k = {}_nC_{n-k}.$$

例 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{1}{3}$ であるとする. この試行を独立に 4 回行うとき, この 4 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \geq \frac{5}{2}\right)$ 及び $P(1 \leq X \leq \sqrt{11})$ を求める.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $P(X = k) = {}_4C_k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq \sqrt{11}) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= 4 \cdot \frac{2^3}{3^4} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2}{3^4} + 4 \cdot \frac{2}{3^5} = \frac{32 + 24 + 8}{3^4} \\ &= \frac{64}{81}. \end{aligned}$$

終

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする．この試行を独立に 5 回行うとき，この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ を求めよ．

確率変数 X は 2 項分布 $B\left(\quad , \quad \right)$ に従うので，

$$E[X] = \quad = \quad , \quad V[X] = \quad = \quad .$$

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする．この試行を独立に 5 回行うとき，この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ 及び分散 $V[X]$ を求めよ．

確率変数 X は 2 項分布 $B\left(5, \frac{2}{3}\right)$ に従うので，

$$E[X] = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ , } \quad V[X] = 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9} \text{ .}$$

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする. この試行を独立に 5 回行うとき, この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P(\sqrt{7} \leq X \leq 4)$ を求めよ.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $P(X = k) =$
なので,

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする. この試行を独立に 5 回行うとき, この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P(\sqrt{7} \leq X \leq 4)$ を求めよ.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $P(X = k) = {}_5C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ なので,

$$P\left(X \leq \frac{9}{4}\right) =$$

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする. この試行を独立に 5 回行うとき, この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P(\sqrt{7} \leq X \leq 4)$ を求めよ.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $P(X = k) = {}_5C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P\left(X \leq \frac{9}{4}\right) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= {}_5C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^5 + {}_5C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + {}_5C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{3^5} + \frac{10}{3^5} + \frac{40}{3^5} = \frac{51}{3^5} \\ &= \frac{17}{81} . \end{aligned}$$

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする. この試行を独立に 5 回行うとき, この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P(\sqrt{7} \leq X \leq 4)$ を求めよ.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $P(X = k) = {}_5C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ なので,

$$P(\sqrt{7} \leq X \leq 4) =$$

問3.1 試行 T において事象 A が起きる確率が $\frac{2}{3}$ であるとする. この試行を独立に 5 回行うとき, この 5 回の試行のうち事象 A が起きる回数を表す変数 X は確率変数である. 確率 $P\left(X \leq \frac{9}{4}\right)$ 及び $P\left(\sqrt{7} \leq X \leq 4\right)$ を求めよ.

X がとりうる値 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して $P(X = k) = {}_5C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$ なので,

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{7} \leq X \leq 4\right) &= P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= {}_5C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + {}_5C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \\ &= {}_5C_2 \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{1}{3^2} + {}_5C_1 \cdot \frac{2^4}{3^4} \cdot \frac{1}{3^1} \\ &= \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \frac{2^3}{3^5} + 5 \frac{2^4}{3^5} = 10 \frac{8}{3^5} + 5 \frac{16}{3^5} \\ &= \frac{160}{243} . \end{aligned}$$

終