

2.4 確率変数の分散と標準偏差

1.3節で述べたように、データの散布度として分散があった。データに n 個の要素

があるとき、その平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ に対して、データの分散 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ は、

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$$

の平均である。

1.3 節で述べたように、データの散布度として分散があった。データに n 個の要素

$x_1, x_2, , x_3, \dots, x_n$
があるとき、その平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ に対して、データの分散 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ は、

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$$

の平均である。つまり、データの分散とは、データの各々の要素と平均との差の 2 乗の平均である。

1.3 節で述べたように、データの散布度として分散があった。データに n 個の要素

$x_1, x_2, , x_3, \dots, x_n$
があるとき、その平均 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ に対して、データの分散 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ は、

$$(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, (x_3 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2$$

の平均である。つまり、データの分散とは、データの各々の要素と平均との差の 2 乗の平均である。同じように、確率変数の分散とは、確率変数の値と平均値との差の 2 乗の平均値である。

[定理 2.2] 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して, 確率変数 X の関数 $Y = \varphi(X)$ も確率変数である.

[定理 2.2] 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して、確率変数 X の関数 $Y = \varphi(X)$ も確率変数である。

定理 2.2 により、定数 μ に対して、確率変数 X の 2 次関数 $(X - \mu)^2$ は確率変数である。

[定義] 確率変数 X の平均値を μ とおく： $\mu = E[X]$. X の分散 $V[X]$ を次のように定義する：

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] .$$

更に、 X の標準偏差 $\sigma[X]$ を次のように定義する：

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} .$$

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = \frac{29}{10}$.

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = \frac{29}{10}$. X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = \frac{29}{10}$. X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

$$\begin{aligned} V[X] &= \left(5 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X = 5) + \left(3 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X = 3) \\ &\quad + \left(1 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X = 1) + \left(0 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X = 0) \end{aligned}$$

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = \frac{29}{10}$. X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

$$\begin{aligned} V[X] &= \left(5 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X=5) + \left(3 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X=3) \\ &\quad + \left(1 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X=1) + \left(0 - \frac{29}{10}\right)^2 P(X=0) \\ &= \left(\frac{21}{10}\right)^2 \cdot \frac{3}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \frac{4}{10} + \left(-\frac{19}{10}\right)^2 \cdot \frac{2}{10} + \left(-\frac{29}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{441}{100} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{10} + \frac{361}{100} \cdot \frac{2}{10} + \frac{841}{100} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{289}{100} . \end{aligned}$$

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{\frac{289}{100}} = \frac{17}{10} .$$

終

問2.4.1 成績が 4 点, 3 点, 2 点, 1 点, 0 点, の 5 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 4 である確率は 10% であり, 3 である確率は 20% であり, 2 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = 2$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ.

問2.4.1 成績が 4 点, 3 点, 2 点, 1 点, 0 点, の 5 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 4 である確率は 10% であり, 3 である確率は 20% であり, 2 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = 2$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ.

$$\begin{aligned} V[X] &= (4-2)^2 \cdot P(X=4) + (3-2)^2 \cdot P(X=3) + (2-2)^2 \cdot P(X=2) \\ &\quad + (1-2)^2 \cdot P(X=1) + (0-2)^2 \cdot P(X=0) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{10} \\ &= \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

問2.4.1 成績が 4 点, 3 点, 2 点, 1 点, 0 点, の 5 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 4 である確率は 10% であり, 3 である確率は 20% であり, 2 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数 X は離散型確率変数であり, X の平均値は $E[X] = 2$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ.

$$\begin{aligned} V[X] &= (4-2)^2 \cdot P(X=4) + (3-2)^2 \cdot P(X=3) + (2-2)^2 \cdot P(X=2) \\ &\quad + (1-2)^2 \cdot P(X=1) + (0-2)^2 \cdot P(X=0) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{10} \\ &= \frac{6}{5} . \end{aligned}$$

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]} = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5} .$$

終

[定理 2.3.3] 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき、変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$ が収束するならば、確率変数 $\varphi(X)$ について $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$.

[定理 2.3.3] 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき、変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$ が収束するならば、確率変数 $\varphi(X)$ について $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$.

定理 2.3.3 により、連続型確率変数の分散を求める式は次のようになる.

[定理 2.4.1] 関数 $f(x)$ が確率変数 X の確率密度関数であるとき、 X の平均値を μ とおくと

$$V[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx .$$

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$. よって関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である. 確率変数 X の平均値は $E[X] = 3$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

【例】 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. よって関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である. 確率変数 X の平均値は $E[X] = 3$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

$$V[X] = E[(X-3)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-3)^2 f(x) dx = \int_0^6 (x-3)^2 \frac{x(6-x)}{36} dx .$$

【例】 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. よって関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である. 確率変数 X の平均値は $E[X] = 3$. 確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求める.

$$V[X] = E[(X-3)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-3)^2 f(x) dx = \int_0^6 (x-3)^2 \frac{x(6-x)}{36} dx .$$

変数 y を $y = x-3$ とおく. $x = y+3$. $dx = dy$. $x = 0$ のとき $y = -3$. $x = 6$ のとき $y = 3$.

$$\begin{aligned} \int_0^6 (x-3)^2 \frac{x(6-x)}{36} dx &= \int_{-3}^3 y^2 \frac{(y+3)(3-y)}{36} dy = \frac{1}{36} \int_{-3}^3 (9y^2 - y^4) dy \\ &= \frac{1}{36} \left[3y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_{-3}^3 = \frac{1}{4 \cdot 3^2} \left(3^4 - \frac{1}{5} \cdot 3^5 + 3^4 \frac{1}{5} \cdot 3^5 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(2 \cdot 3^2 - \frac{2}{5} \cdot 3^3 \right) = \frac{9}{2} \left(1 - \frac{3}{5} \right) \\ &= \frac{9}{5} . \end{aligned}$$

故に $V[X] = \frac{9}{5}$.

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} .$$

【終】

問2.4.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の
平均値は $E[X] = 1$ ．確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ．

問2.4.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の
平均値は $E[X] = 1$ ．確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ．

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f(x) dx = \int_{-1}^3 (x-1)^2 \frac{3}{32} (2x+3-x^2) dx .$$

変数 y を $y = x-1$ とおく．

問2.4.2

実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の平均値は $E[X] = 1$ ．確率変数 X の分散 $V[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とを求めよ．

$$V[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f(x) dx = \int_{-1}^3 (x-1)^2 \frac{3}{32} (2x+3-x^2) dx .$$

変数 y を $y = x-1$ とおく． $x = y+1$ ． $dx = dy$ ． $x = -1$ のとき $y = -2$ ． $x = 3$ のとき $y = 2$ ．

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (x-1)^2 \frac{3}{32} (2x+3-x^2) dx &= \int_{-2}^2 \frac{3}{32} y^2 \{2(y+1)+3-(y+1)^2\} dy \\ &= \frac{3}{32} \int_{-2}^2 (4y^2 - y^4) dy = \frac{3}{32} \left[\frac{4}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{4}{5} . \end{aligned}$$

故に $V[X] = \frac{4}{5}$ ．

$$\sigma[X] = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} .$$

終

以下の定理が成り立つ.

[定理 2.4.2] 確率変数 X の分散 $V[X]$ があるならば, 定数 c に対して, 確率変数 $X + c$ の分散 $V[X + c]$ 及び標準偏差 $\sigma[X + c]$ は

$$V[X + c] = V[X] \text{ , } \quad \sigma[X + c] = \sigma[X] \text{ .}$$

[定理 2.4.3] 確率変数 X の分散 $V[X]$ があるならば, 定数 k に対して, 確率変数 kX の分散 $V[kX]$ 及び標準偏差 $\sigma[kX]$ は

$$V[kX] = k^2 V[X] \text{ , } \quad \sigma[kX] = |k| \sigma[X] \text{ .}$$

例 確率変数 X について $E[X] = 8$, $V[X] = 5$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{7-2X}{3}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求める.

例 確率変数 X について $E[X] = 8$, $V[X] = 5$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{7-2X}{3}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求める.

確率変数 Y の分散 $V[Y]$ は,

$$\begin{aligned} V[Y] &= V\left[\frac{7-2X}{3}\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 V[7-2X] = \frac{1}{9} V[-2X] = \frac{1}{9} (-2)^2 V[X] = \frac{4}{9} \cdot 5 \\ &= \frac{20}{9} . \end{aligned}$$

例 確率変数 X について $E[X] = 8$, $V[X] = 5$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{7-2X}{3}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求める.

確率変数 Y の分散 $V[Y]$ は,

$$\begin{aligned} V[Y] &= V\left[\frac{7-2X}{3}\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 V[7-2X] = \frac{1}{9} V[-2X] = \frac{1}{9}(-2)^2 V[X] = \frac{4}{9} \cdot 5 \\ &= \frac{20}{9} . \end{aligned}$$

確率変数 Y の標準偏差 $\sigma[Y]$ は,

$$\sigma[Y] = \sqrt{V[Y]} = \sqrt{\frac{20}{9}} = \frac{\sqrt{20}}{3} .$$

終

問2.4.3 確率変数 X について $E[X] = 7$, $V[X] = 3$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求めよ.

問2.4.3 確率変数 X について $E[X] = 7$, $V[X] = 3$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求めよ.

確率変数 Y の分散 $V[Y]$ は,

$$\begin{aligned} V[Y] &= V\left[\frac{9-4X}{5}\right] = \left(\frac{1}{5}\right)^2 V[9-4X] = \frac{1}{25} V[-4X] = \frac{1}{25} (-4)^2 V[X] = \frac{16}{25} \cdot 3 \\ &= \frac{48}{25} . \end{aligned}$$

問2.4.3 確率変数 X について $E[X] = 7$, $V[X] = 3$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$ とおく. 確率変数 Y の分散 $V[Y]$ と標準偏差 $\sigma[Y]$ とを求めよ.

確率変数 Y の分散 $V[Y]$ は,

$$\begin{aligned} V[Y] &= V\left[\frac{9-4X}{5}\right] = \left(\frac{1}{5}\right)^2 V[9-4X] = \frac{1}{25} V[-4X] = \frac{1}{25} (-4)^2 V[X] = \frac{16}{25} \cdot 3 \\ &= \frac{48}{25} . \end{aligned}$$

確率変数 Y の標準偏差 $\sigma[Y]$ は,

$$\sigma[Y] = \sqrt{V[Y]} = \sqrt{\frac{48}{25}} = \frac{\sqrt{48}}{5} .$$

終

[定理 1.3] 正の自然数 n に対して n 個の数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を要素とするデータについて, 平均を $\bar{x}$ とおくと, 分散は

$$v = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 .$$

[定理 1.3] 正の自然数 n に対して n 個の数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ を要素とするデータについて、平均を $\bar{x}$ とおくと、分散は

$$v = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 .$$

これと同様のことが確率変数の分散についても成り立つ.

[定理 2.4.4] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ と確率変数 X^2 の平均値 $E[X^2]$ とがあるならば、 X の分散 $V[X]$ は

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 .$$

確率変数について標準化という考えが重要になる.

[定義] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とがあり $\sigma[X] > 0$ であるとき, X を標準化した確率変数とは次の確率変数のことである:

$$\frac{X - E[X]}{\sigma[X]} .$$

確率変数について標準化という考えが重要になる.

[定義] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とがあり $\sigma[X] > 0$ であるとき, X を標準化した確率変数とは次の確率変数のことである:

$$\frac{X - E[X]}{\sigma[X]} .$$

[定理 2.4.5] 確率変数 X の平均値 $\mu = E[X]$ と標準偏差 $\sigma = \sigma[X]$ とがあり $\sigma > 0$ であるとき, X を標準化した確率変数 $\frac{X - \mu}{\sigma}$ の平均値は 0 であり標準偏差は 1 である:

$$E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = 0 , \quad \sigma\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = 1 .$$

確率変数について標準化という考えが重要になる.

[定義] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ と標準偏差 $\sigma[X]$ とがあり $\sigma[X] > 0$ であるとき, X を標準化した確率変数とは次の確率変数のことである:

$$\frac{X - E[X]}{\sigma[X]} .$$

[定理 2.4.5] 確率変数 X の平均値 $\mu = E[X]$ と標準偏差 $\sigma = \sigma[X]$ とがあり $\sigma > 0$ であるとき, X を標準化した確率変数 $\frac{X - \mu}{\sigma}$ の平均値は 0 であり標準偏差は 1 である:

$$E\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = 0 , \quad \sigma\left[\frac{X - \mu}{\sigma}\right] = 1 .$$

標準化とは平均値が 0 であり標準偏差が 1 である分布に換算することである.
