

2.3 確率変数の平均値

1.2 節で述べたように、データの代表値として平均があった。同じように、確率変数についても平均値の概念がある。

例 あるくじには当たりと外れとがあり，当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰えて，外れると賞金は貰えないものとする．このくじを何回も引くと，20 回に 1 回ぐらいの割合で賞金 10 万円を貰える；1 回あたりの平均では $10 \text{ 万円} \times \frac{1}{20} = 5000 \text{ 円}$ 貰える．

終

例 あるくじには当たりと外れとがあり，当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰えて，外れると賞金は貰えないものとする．このくじを何回も引くと，20 回に 1 回ぐらいの割合で賞金 10 万円を貰える；1 回あたりの平均では $10 \text{ 万円} \times \frac{1}{20} = 5000 \text{ 円}$ 貰える． **終**

このようにして，確率変数の実現値の試行 1 回あたりの平均を考えることができる．

例 あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと外れとがあり，1等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰え，2等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金 1 万円を貰え，外れると賞金を貰えないものとする．1等賞が当たることと2等賞が当たることとは互いに独立であるとする．

例 あるくじには1等賞の当たりと2等賞の当たりと外れとがあり，1等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金10万円を貰え，2等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金1万円を貰え，外れると賞金を貰えないものとする．1等賞が当たることと2等賞が当たることとは互いに独立であるとする．このくじを何回も引くときの1回あたりの貰える賞金の平均は次のようになる：

$$10\text{万円} \times \frac{1}{20} + 1\text{万円} \times \frac{1}{5} = 5000\text{円} + 2000\text{円} = 7000\text{円} . \quad \text{終}$$

例 あるくじには 1 等賞の当たりと 2 等賞の当たりと外れとがあり，1 等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{20}$ で当たると賞金 10 万円を貰え，2 等賞が当たる確率はいつも $\frac{1}{5}$ で当たると賞金 1 万円を貰え，外れると賞金を貰えないものとする．1 等賞が当たることと 2 等賞が当たることとは互いに独立であるとする．このくじを何回も引くときの 1 回あたりの貰える賞金の平均は次のようになる：

$$10 \text{ 万円} \times \frac{1}{20} + 1 \text{ 万円} \times \frac{1}{5} = 5000 \text{ 円} + 2000 \text{ 円} = 7000 \text{ 円} . \quad \text{終}$$

このように，離散型確率変数の平均値は，確率変数の実現値とその実現値をとる確率との積の合計である．

離散型確率変数 X について以下の 2 条件のどちらかが成り立った：

- (1) X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) で枚挙できて、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^N P(X = x_n) &= P(X = x_0) + P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots \\ &\quad + P(X = x_{N-1}) + P(X = x_N) \\ &= 1 ;\end{aligned}$$

- (2) X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ で枚挙できて、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) &= P(X = x_0) + P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots \\ &\quad + P(X = x_n) + P(X = x_{n+1}) + \cdots \\ &= 1 .\end{aligned}$$

[定義] 離散型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を次のように定義する: X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る有限数列 $\{x_n\}_{0 \leq n \leq N}$ (N は自然数) で枚挙できて $\sum_{n=0}^N P(X = x_n) = 1$ のとき, X の平均値 $E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{n=0}^N \{x_n P(X = x_n)\} ;$$

X がとり得る値の総てを互いに異なる実数より成る無限数列 $\{x_n\}_{n \geq 0}$ で枚挙できて $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = x_n) = 1$ のとき, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \{x_n P(X = x_n)\}$ が収束するならば, X の平均値 $E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \{x_n P(X = x_n)\} .$$

確率変数 X の実現値を調べる試行を何回も行うと、 X の実現値は様々な値になり得る。確率変数 X の平均値とは、大雑把にいうと、試行を何回も行うときの X の実現値の平均である。確率変数の平均値のことを期待値ということもある。

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする.

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 5, 3, 1, 0 だけで,

$$P(X=5) = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{4}{10}, \quad P(X=1) = \frac{2}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{10}.$$

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 5, 3, 1, 0 だけで,

$$P(X=5) = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{4}{10}, \quad P(X=1) = \frac{2}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{10}.$$

よって,

$$\begin{aligned} P(X=5) + P(X=3) + P(X=1) + P(X=0) &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 5, 3, 1, 0 だけで,

$$P(X=5) = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{4}{10}, \quad P(X=1) = \frac{2}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{10}.$$

よって,

$$\begin{aligned} P(X=5) + P(X=3) + P(X=1) + P(X=0) &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

故に変数 X は離散型確率変数である. 確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める.

例 成績が 5 点, 3 点, 1 点, 0 点, の 4 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 5 である確率は 30% であり, 3 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 5, 3, 1, 0 だけで,

$$P(X=5) = \frac{3}{10}, \quad P(X=3) = \frac{4}{10}, \quad P(X=1) = \frac{2}{10}, \quad P(X=0) = \frac{1}{10}.$$

よって,

$$\begin{aligned} P(X=5) + P(X=3) + P(X=1) + P(X=0) &= \frac{3}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

故に変数 X は離散型確率変数である. 確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める.

$$\begin{aligned} E[X] &= 5 \cdot P(X=5) + 3 \cdot P(X=3) + 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) \\ &= 5 \cdot \frac{3}{10} + 3 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{15}{10} + \frac{12}{10} + \frac{2}{10} \\ &= \frac{29}{10}. \end{aligned}$$

終

問2.3.1 成績が 0 点, 1 点, 2 点, 3 点, 4 点, の 5 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 4 である確率は 10% であり, 3 である確率は 20% であり, 2 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 4, 3, 2, 1, 0 だけで,

$$\begin{aligned} & P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{10}{2} + \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって変数 X は離散型確率変数である. 確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めよ.

$$\begin{aligned} & E[X] \\ &= \cdot P(X=) + \cdot P(X=) + \cdot P(X=) + \cdot P(X=) + \cdot P(X=) \end{aligned}$$

問2.3.1 成績が 0 点, 1 点, 2 点, 3 点, 4 点, の 5 段階で点数化されるものとする. 成績の点数は, 4 である確率は 10% であり, 3 である確率は 20% であり, 2 である確率は 40% であり, 1 である確率は 20% であり, 0 である確率は 10% であるとする. 成績の点数を表す変数を X とおく. X のとりうる値は 4, 3, 2, 1, 0 だけで,

$$\begin{aligned} & P(X=4) + P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって変数 X は離散型確率変数である. 確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めよ.

$$\begin{aligned} & E[X] \\ &= 4 \cdot P(X=4) + 3 \cdot P(X=3) + 2 \cdot P(X=2) + 1 \cdot P(X=1) + 0 \cdot P(X=0) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{4}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{6}{10} + \frac{8}{10} + \frac{2}{10} \\ &= 2. \end{aligned}$$

終

連続型確率変数の平均値を考える.

例 人が長さを測らずに目分量で紐を 3m になるべく近い長さで切り出すとき、切り出した紐の実際の長さ（単位は m）を表す変数を X とおく．この確率変数 X に関する確率について、次のように階級幅を $\Delta x = 0.5$ として確率の度数分布表を考える．

x	$x + \Delta x$	確率 $P(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2	0	
2	2.5	0.104	2.25
2.5	3	0.446	2.75
3	3.5	0.401	3.25
3.5	4	0.049	3.75
4	∞	0	

例 人が長さを測らずに目分量で紐を 3m になるべく近い長さで切り出すとき、切り出した紐の実際の長さ（単位は m）を表す変数を X とおく．この確率変数 X に関する確率について、次のように階級幅を $\Delta x = 0.5$ として確率の度数分布表を考える．

x	$x + \Delta x$	確率 $P(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2	0	
2	2.5	0.104	2.25
2.5	3	0.446	2.75
3	3.5	0.401	3.25
3.5	4	0.049	3.75
4	∞	0	

確率変数 X の平均値 $E[X]$ は、各階級の階級値とその階級に X の値が属す確率との積の合計で近似され则认为る．

$$\begin{aligned}
 E[X] &\doteq 2.25 \times P(2 \leq X \leq 2.5) + 2.75 \times P(2.5 \leq X \leq 3) \\
 &\quad + 3.25 \times P(3 \leq X \leq 3.5) + 3.75 \times P(3.5 \leq X \leq 4) \\
 &= 2.25 \times 0.104 + 2.75 \times 0.446 + 3.25 \times 0.401 + 3.75 \times 0.049 \\
 &= 2.948 .
 \end{aligned}$$

要素の個数が充分多いデータを元に確率が算出されているときは、階級幅を小さくして計算すると精密になる。階級幅を $\Delta x = 0.2$ として確率の分布表を作る。

x	$x + \Delta x$	確率 $P(x < X \leq x + \Delta x)$	階級値
$-\infty$	2.2	0	
2.2	2.4	0.0486	2.3
2.4	2.6	0.1268	2.5
2.6	2.8	0.1766	2.7
2.8	3	0.1979	2.9
3	3.2	0.1908	3.1
3.2	3.4	0.1553	3.3
3.4	3.6	0.0913	3.5
3.6	3.8	0.0127	3.7
3.8	∞	0	

この表において、確率変数 X の平均値 $E[X]$ は、各階級の階級値とその階級に X の値が属す確率との積の合計で近似され则认为る。

$$\begin{aligned}
 E[X] &= 2.3 \times P(2.2 < X \leq 2.4) + 2.5 \times P(2.4 < X \leq 2.6) + \\
 &\quad 2.7 \times P(2.6 < X \leq 2.8) + 2.9 \times P(2.8 < X \leq 3) + \\
 &\quad 3.1 \times P(3 < X \leq 3.2) + 3.3 \times P(3.2 < X \leq 3.4) + \\
 &\quad 3.5 \times P(3.4 < X \leq 3.6) + 3.7 \times P(3.6 < X \leq 3.8) \\
 &\doteq 2.3 \times 0.0486 + 2.5 \times 0.1268 + 2.7 \times 0.1766 + 2.9 \times 0.1979 + \\
 &\quad 3.1 \times 0.1908 + 3.3 \times 0.1553 + 3.5 \times 0.0913 + 3.7 \times 0.0127 \\
 &\doteq 2.9500 .
 \end{aligned}$$

$E[X]$ はほぼ 2.950 である

終

この考え方を進める。

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおく. 実数 a, b について $a < b$ で, X のとり得る値は a 以上 b 以下とする.

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおく. 実数 a, b について $a < b$ で, X のとり得る値は a 以上 b 以下とする. 正の自然数 n に対して $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 区間 $[a, b]$ を n 個の小さい区間つまり階級 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する.

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ とおく．実数 a, b について $a < b$ で， X のとり得る値は a 以上 b 以下とする．正の自然数 n に対して $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり，区間 $[a, b]$ を n 個の小さい区間つまり階級 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\dots$, $[x_{n-1}, x_n]$ に分割する．階級 $[x_0, x_1]$ の階級幅 $x_1 - x_0$ ，階級 $[x_1, x_2]$ の階級幅 $x_2 - x_1$ ，階級 $[x_2, x_3]$ の階級幅 $x_3 - x_2$, $\dots$, 階級 $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$ ，の中で最も大きいものを δ_n とおく：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき δ_n は 0 に収束するとする； $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ ．

各階級 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) に属す階級値 ξ_k に対して, 確率変数 X の平均値を次の式の値で近似する :

$$\begin{aligned} & \xi_1 P(x_0 \leq X \leq x_1) + \xi_2 P(x_1 \leq X \leq x_2) + \xi_3 P(x_2 \leq X \leq x_3) + \cdots \\ & \quad + \xi_{n-1} P(x_{n-2} \leq X \leq x_{n-1}) + \xi_n P(x_{n-1} \leq X \leq x_n) \\ & = \sum_{k=1}^n \{ \xi_k P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) \} . \end{aligned}$$

各階級 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) に属す階級値 ξ_k に対して, 確率変数

X の平均値を次の式の値で近似する:

$$\begin{aligned} & \xi_1 P(x_0 \leq X \leq x_1) + \xi_2 P(x_1 \leq X \leq x_2) + \xi_3 P(x_2 \leq X \leq x_3) + \cdots \\ & + \xi_{n-1} P(x_{n-2} \leq X \leq x_{n-1}) + \xi_n P(x_{n-1} \leq X \leq x_n) \\ & = \sum_{k=1}^n \{ \xi_k P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) \} . \end{aligned}$$

X に関する確率 $P(x_{k-1} \leq X \leq x_k)$ を X の値の幅 $x_k - x_{k-1}$ で割った式 $\frac{P(x_{k-1} \leq X \leq x_k)}{x_k - x_{k-1}}$ の極限值が X の確率密度関数 $f(x)$ の値なので, $x_k - x_{k-1}$ の値が 0 に近いとき,

$$\begin{aligned} \frac{P(x_{k-1} \leq X \leq x_k)}{x_k - x_{k-1}} & \doteq f(\xi_k) , \\ P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) & \doteq f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) , \end{aligned}$$

よって確率変数 X の平均値の近似式は

$$\sum_{k=1}^n \{ \xi_k P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) \} \doteq \sum_{k=1}^n \{ \xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \} .$$

右辺の式は関数 $xf(x)$ のリーマン和である; これを S_n とおく:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ \xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \} \doteq \sum_{k=1}^n \{ \xi_k P(x_{k-1} \leq X \leq x_k) \} .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき関数 $xf(x)$ のリーマン和 S_n が唯一つの実数に収束するならば, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を確率変数 X の平均値とする. $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

が 0 に収束するので, 関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるならば, 関数 $xf(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{ \xi_k f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \}$ の極限值は定積分 $\int_a^b xf(x) dx$ である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b xf(x) dx .$$

関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり, X のとりうる値が a 以上 b 以下であり, 関数 $xf(x)$ が a から b まで定積分可能であるとき, X の平均値は定積分 $\int_a^b xf(x) dx$ とする.

確率変数 X の値の範囲を限定しないときは次のように考える：関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり，関数 $xf(x)$ が実数全体において広義積分可能であるとき， X の平均値は広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ とする．

確率変数 X の値の範囲を限定しないときは次のように考える：関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であり，関数 $xf(x)$ が実数全体において広義積分可能であるとき， X の平均値は広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ とする．

[定義] 関数 $f(x)$ が連続型確率変数 X の確率密度関数であるとき， X の平均値 $E[X]$ を次のように定義する：広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ が収束するならば

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ .}$$

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める．

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である。確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める。

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^6 x \frac{x(6-x)}{36} dx = \frac{1}{36} \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx$$

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x(6-x)}{36} & (0 \leq x \leq 6 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 0 \text{ または } x > 6 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求める．

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^6 x \frac{x(6-x)}{36} dx = \frac{1}{36} \int_0^6 (6x^2 - x^3) dx \\ &= \frac{1}{36} \left[2x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^6 = \frac{1}{36} (2 \cdot 6^3 - 9 \cdot 6^2) \\ &= 3 . \end{aligned}$$

終

問2.3.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めよ．

問2.3.2 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(2x+3-x^2) & (-1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < -1 \text{ または } x > 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

各実数 x について $f(x) \geq 0$ で、 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$ なので、この関数 $f(x)$ はある連続型確率変数 X の確率密度関数である．確率変数 X の平均値 $E[X]$ を求めよ．

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^3 x \frac{3}{32} (2x+3-x^2) dx \\ &= \frac{3}{32} \int_{-1}^3 (2x^2 + 3x - x^3) dx = \frac{3}{32} \left[\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_{-1}^3 \\ &= 1 . \end{aligned}$$

終

確率変数の平均値は無いこともある.

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる.

確率変数の平均値は無いこともある。

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる．任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ ．

確率変数の平均値は無いこともある。

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる．任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ ．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

確率変数の平均値は無いこともある.

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる. 任意の実数 x について $f(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数である.

確率変数の平均値は無いこともある。

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる．任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ ．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数である．関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を調べる．

確率変数の平均値は無いこともある。

例 実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & (x \geq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x < 1 \text{ のとき}) \end{cases}.$$

この関数 $f(x)$ は連続型確率変数の確率密度関数であるか調べる．任意の実数 x について $f(x) \geq 0$ ．

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{u} + 1 \right) \\ &= 1 . \end{aligned}$$

よって関数 $f(x)$ は確率変数の確率密度関数である．関数 $f(x)$ を確率密度関数とする連続型確率変数 X の平均値 $E[X]$ を調べる．

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u x \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} [\ln x]_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln u) \\ &= \infty . \end{aligned}$$

確率変数 X の平均値 $E[X]$ は無い．

終

以下の定理が成り立つ.

[定理 2.3.1] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ があるならば, 定数 c に対して, 確率変数 $X + c$ の平均値は

$$E[X + c] = E[X] + c .$$

[定理 2.3.2] 確率変数 X の平均値 $E[X]$ があるならば, 定数 k に対して, 確率変数 kX の平均値は

$$E[kX] = kE[X] .$$

例 確率変数 X について $E[X] = -\frac{7}{3}$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{6X+4}{5}$ とおく. 確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求める.

例 確率変数 X について $E[X] = -\frac{7}{3}$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{6X+4}{5}$ とおく. 確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求める.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{6X+4}{5}\right] = \frac{1}{5}E[6X+4] = \frac{1}{5}(E[6X]+4) \\ &= \frac{1}{5}(6E[X]+4) = \frac{1}{5}\left\{6\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)+4\right\} \\ &= -2 . \end{aligned}$$

終

問2.3.3 確率変数 X について $E[X] = \frac{7}{2}$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{9 - 4X}{5}$

とおく. 確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求めよ.

問2.3.3 確率変数 X について $E[X] = \frac{7}{2}$ とする. 変数 Y を $Y = \frac{9-4X}{5}$

とおく. 確率変数 Y の平均値 $E[Y]$ を求めよ.

$$\begin{aligned} E[Y] &= E\left[\frac{9-4X}{5}\right] = \frac{1}{5} E[9-4X] = \frac{1}{5} (9 - E[4X]) \\ &= \frac{1}{5} (9 - 4E[X]) = \frac{1}{5} \left(9 - 4 \cdot \frac{7}{2}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

終

次の定理が成り立つ.

[定理 2.3.3] 変数 X が連続型確率変数で関数 $f(x)$ が X の確率密度関数であるとき, 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ について広義積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$ が収束するならば, 確率変数 $\varphi(X)$ について $E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx$.
