

2.2 確率変数の関数

[定義] 確率変数 X の関数 $\varphi(X)$ について, $Y = \varphi(X)$ である変数 Y が確率変数であるとき, この変数を確率変数 $\varphi(X)$ という.

変数 X は確率変数であるとする. $p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える.

変数 X は確率変数であるとする. $p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

変数 X は確率変数であるとする. $p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right).$$

変数 X は確率変数であるとする. $p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので, 確率 $P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる. よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる.

変数 X は確率変数であるとする. $p > 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \leq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので, 確率 $P\left(X \leq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる. よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる. 故に $Y = pX + q$ は確率変数である.

変数 X は確率変数であるとする. $p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える.

変数 X は確率変数であるとする. $p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

変数 X は確率変数であるとする. $p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right).$$

変数 X は確率変数であるとする. $p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので, 確率 $P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる. よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる.

変数 X は確率変数であるとする. $p < 0$ である定数 p 及び定数 q に対して, X の 1 次関数 $Y = pX + q$ を考える. 任意の実数 a について,

$$Y \leq a \iff pX + q \leq a \iff pX \leq a - q \iff X \geq \frac{a - q}{p},$$

よって

$$P(Y \leq a) = P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right).$$

X が確率変数なので, 確率 $P\left(X \geq \frac{a - q}{p}\right)$ が唯一つ定まる. よって確率 $P(Y \leq a)$ も唯一つ定まる. 故に $Y = pX + q$ は確率変数である.

このように、 0 でない定数 p 及び定数 q に対して、確率変数 X の 1 次関数 $Y = pX + q$ は確率変数である.

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える.

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える. 実数 a について $a \geq 0$ のとき,

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a} ,$$

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える. 実数 a について $a \geq 0$ のとき,

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a},$$

よって $P(Y \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$; 確率 $P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ が唯一つ定まるので, 確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる.

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える. 実数 a について $a \geq 0$ のとき,

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a},$$

よって $P(Y \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$; 確率 $P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ が唯一つ定まるので, 確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる. 確率変数 X の値は実数なので, 実数 a について $a < 0$ のとき, $X^2 < a$ つまり $Y < a$ であることは無い; よって $P(Y \leq a) = 0$.

確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ を考える. 実数 a について $a \geq 0$ のとき,

$$Y \leq a \iff X^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a},$$

よって $P(Y \leq a) = P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$; 確率 $P(-\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{a})$ が唯一つ定まるので, 確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる. 確率変数 X の値は実数なので, 実数 a について $a < 0$ のとき, $X^2 < a$ つまり $Y < a$ であることは無い; よって $P(Y \leq a) = 0$. このように, 任意の実数 a に対して $Y \leq a$ である確率 $P(Y \leq a)$ が唯一つ定まる. 故に確率変数 X の 2 次関数 $Y = X^2$ は確率変数である.

このような議論を発展させると次の定理が導かれる.

[定理 2.2] 変数 x の整式で表される関数 $\varphi(x)$ に対して, 確率変数 X の関数 $Y = \varphi(X)$ も確率変数である.

例 あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す. このさいころはどの目も等確率ででるとする. このとき変数 X は確率変数である. 更に, 確率変数 Y を $Y = X^2 - 6X$ とおく. 確率 $P(Y \leq -7)$ を求める.

例 あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す. このさいころはどの目も等確率ででるとする. このとき変数 X は確率変数である. 更に, 確率変数 Y を $Y = X^2 - 6X$ とおく. 確率 $P(Y \leq -7)$ を求める.

$$\begin{aligned} Y \leq -7 &\iff X^2 - 6X \leq -7 \iff X^2 - 6X + 7 \leq 0 \\ &\iff (x - 3 + \sqrt{2})(x - 3 - \sqrt{2}) \leq 0 \\ &\iff 3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2} . \end{aligned}$$

例 あるさいころを投げてでる目の数を変数 X で表す. このさいころはどの目も等確率ででるとする. このとき変数 X は確率変数である. 更に, 確率変数 Y を $Y = X^2 - 6X$ とおく. 確率 $P(Y \leq -7)$ を求める.

$$\begin{aligned} Y \leq -7 &\iff X^2 - 6X \leq -7 \iff X^2 - 6X + 7 \leq 0 \\ &\iff (x - 3 + \sqrt{2})(x - 3 - \sqrt{2}) \leq 0 \\ &\iff 3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2} . \end{aligned}$$

確率変数 X がとり得る値は 1 から 6 までの自然数だけなので,

$$\begin{aligned} P(Y \leq -7) &= P(3 - \sqrt{2} \leq X \leq 3 + \sqrt{2}) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

終

問2.2 ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し、カードの数を調べる。ジャックは 11 と、クイーンは 12 と、キングは 13 とみなす。取り出したカードの数を表す変数を X とおく。この変数 X は確率変数である。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 8X$ とおく。確率 $P(Y \leq -9)$ を求めよ。

問2.2 ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し、カードの数を調べる. ジャックは 11 と、クイーンは 12 と、キングは 13 とみなす. 取り出したカードの数を表す変数を X とおく. この変数 X は確率変数である. 更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 8X$ とおく. 確率 $P(Y \leq -9)$ を求めよ.

$$\begin{aligned} Y \leq -9 &\iff X^2 - 8X \leq -9 \iff X^2 - 8X + 9 \leq 0 \\ &\iff (X - 4 + \sqrt{7})(X - 4 - \sqrt{7}) \\ &\iff 4 - \sqrt{7} \leq X \leq 4 + \sqrt{7} . \end{aligned}$$

問2.2 ジョーカーを除く 52 枚のトランプカードから等確率で 1 枚のカードを取り出し、カードの数を調べる。ジャックは 11 と、クイーンは 12 と、キングは 13 とみなす。取り出したカードの数を表す変数を X とおく。この変数 X は確率変数である。更に、確率変数 Y を $Y = X^2 - 8X$ とおく。確率 $P(Y \leq -9)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} Y \leq -9 &\iff X^2 - 8X \leq -9 \iff X^2 - 8X + 9 \leq 0 \\ &\iff (X - 4 + \sqrt{7})(X - 4 - \sqrt{7}) \\ &\iff 4 - \sqrt{7} \leq X \leq 4 + \sqrt{7} . \end{aligned}$$

確率変数 X がとり得る値は 1 から 13 までの自然数だけなので、

$$\begin{aligned} P(Y \leq -9) &= P(4 - \sqrt{7} \leq X \leq 4 + \sqrt{7}) \\ &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) \\ &= \frac{5}{13} . \end{aligned}$$

終