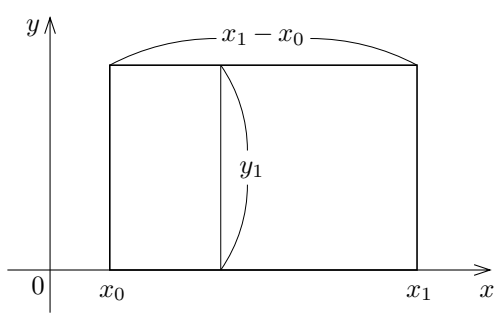


2.0 定積分の意味と定義

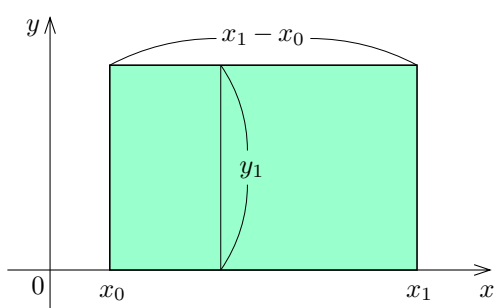
掛け算の概念を拡張する.

xy 座標平面における領域の面積について考える.

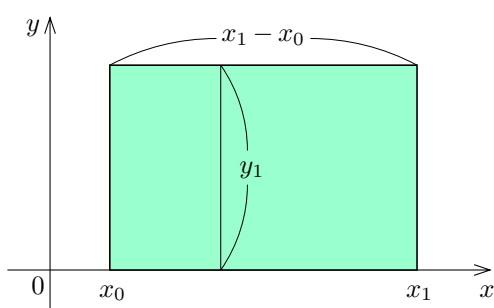
右図のように、底辺が x 軸
に含まれる長方形の点の x 座
標の範囲が x_0 以上 x_1 以下
であり高さが y_1 であるとする；



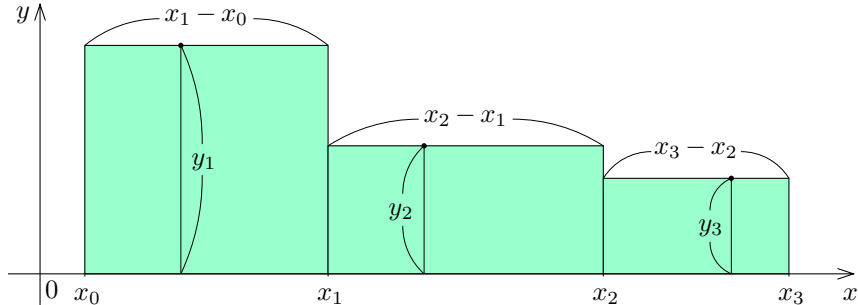
右図のように、底辺が x 軸に含まれる長方形の点の x 座標の範囲が x_0 以上 x_1 以下であり高さが y_1 であるとする；この長方形で囲まれる領域の面積は、横幅 $x_1 - x_0$ と高さ y_1 との積 $y_1(x_1 - x_0)$ である。



右図のように、底辺が x 軸に含まれる長方形の点の x 座標の範囲が x_0 以上 x_1 以下であり高さが y_1 であるとする；この長方形で囲まれる領域の面積は、横幅 $x_1 - x_0$ と高さ y_1 との積 $y_1(x_1 - x_0)$ である。



1 個だけの長方形では“高さ”が一定であるが，“高さ”が途中で切り替わる図形を考える。

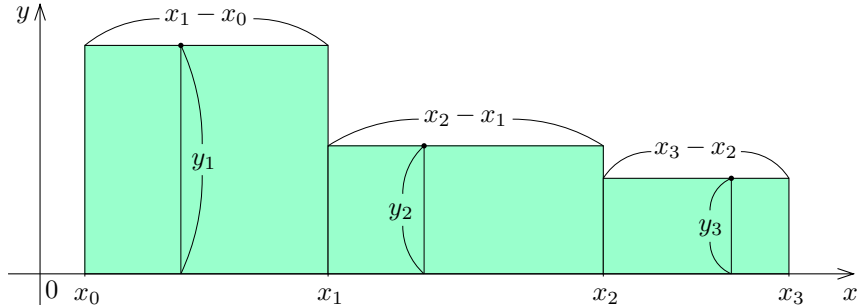


x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で高さが y_1 であり,

x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で高さが y_2 であり,

x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で高さが y_3 である

とき, 上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は



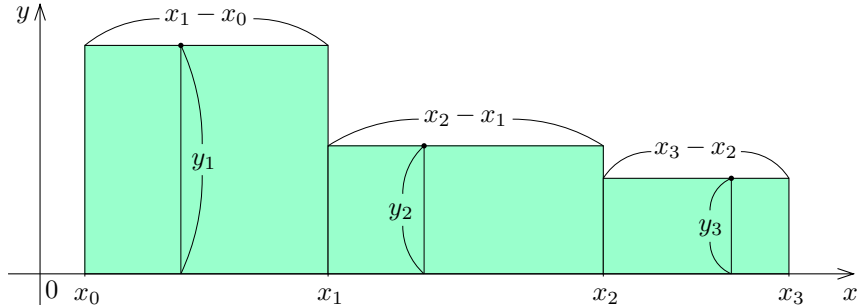
x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で高さが y_1 であり,

x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で高さが y_2 であり,

x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で高さが y_3 である

とき, 上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2)$$



x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で高さが y_1 であり,

x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で高さが y_2 であり,

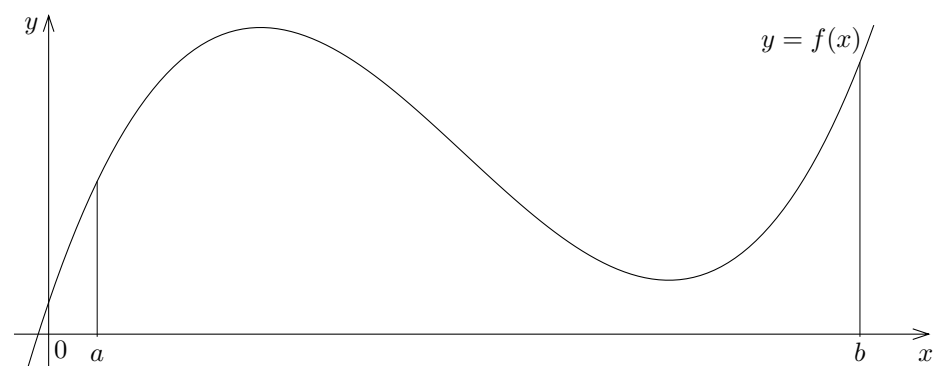
x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で高さが y_3 である

とき, 上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

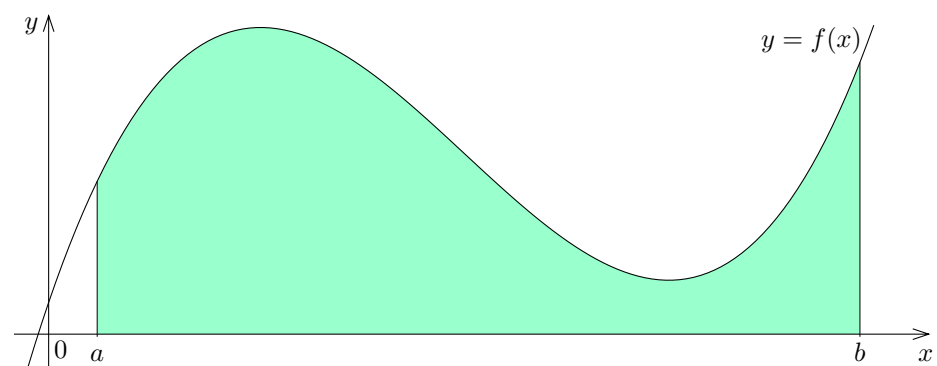
$$y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2) = \sum_{k=1}^3 \{y_k(x_k - x_{k-1})\} .$$

x 軸からの “高さ” が x 座標の関数として変化する図形を考える.

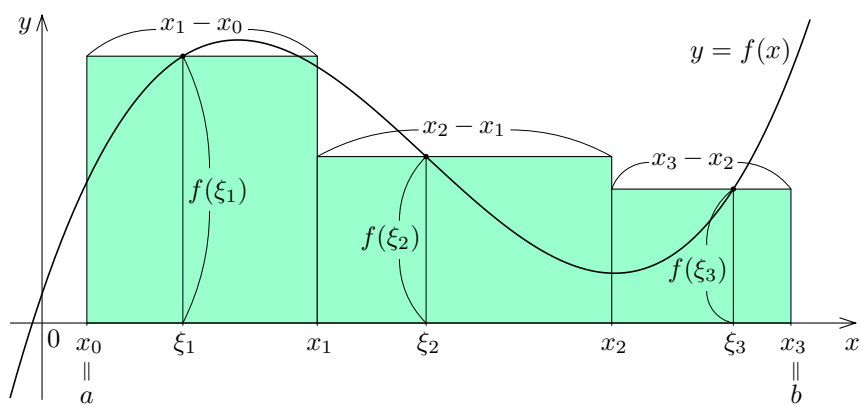
x 軸からの“高さ”が x 座標の関数として変化する図形を考える．実数 a, b について $a \leq b$ で，関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする．

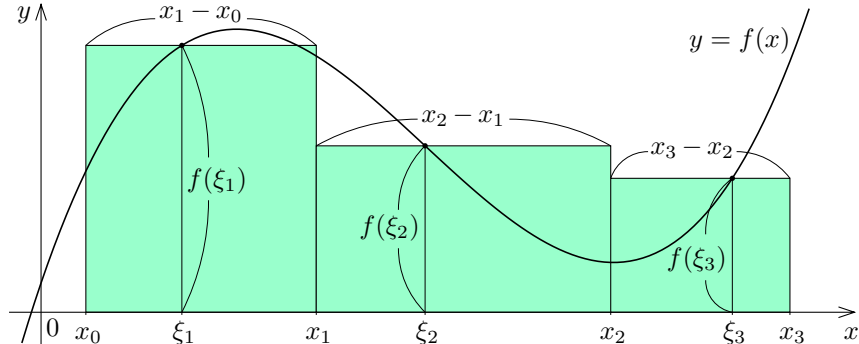


x 軸からの“高さ”が x 座標の関数として変化する図形を考える．実数 a, b について $a \leq b$ で，関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする．関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と直線 $x = b$ とで囲まれる下図の明緑色の領域の面積を考える．

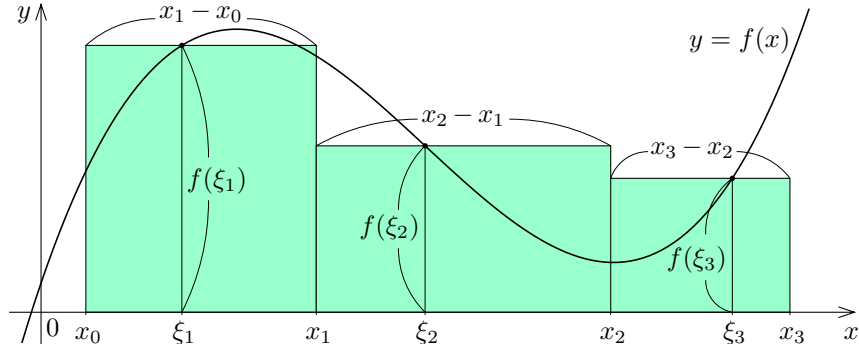


$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び ξ_1, ξ_2, ξ_3 をとり、前の図の明緑色の部分の面積を、下図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積で近似する。



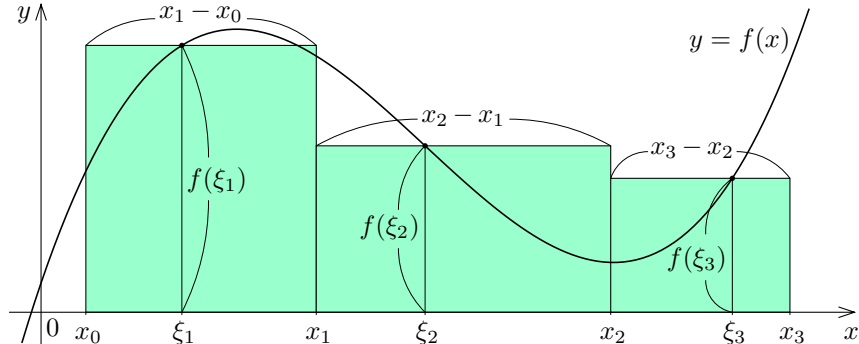


x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり高さが $f(\xi_1)$ であり、
 x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり高さが $f(\xi_2)$ であり、
 x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり高さが $f(\xi_3)$ である
 とする。上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は



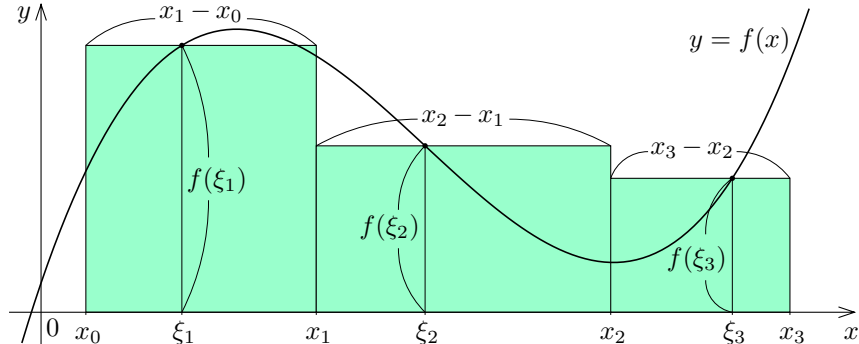
x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり高さが $f(\xi_1)$ であり、
 x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり高さが $f(\xi_2)$ であり、
 x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり高さが $f(\xi_3)$ である
 とする。上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2)$$



x 座標が x_0 以上 x_1 以下の範囲で実数 ξ_1 をとり高さが $f(\xi_1)$ であり、
 x 座標が x_1 以上 x_2 以下の範囲で実数 ξ_2 をとり高さが $f(\xi_2)$ であり、
 x 座標が x_2 以上 x_3 以下の範囲で実数 ξ_3 をとり高さが $f(\xi_3)$ である
 とする。上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) = \sum_{k=1}^3 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) = \sum_{k=1}^3 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

このような式（の値）を関数 f のリーマン和という。

リーマン和を定義する.

リーマン和を定義する.

実数 a, b について $a \leq b$ で, 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, S_n を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) . \end{aligned}$$

リーマン和を定義する.

実数 a, b について $a \leq b$ で, 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, S_n を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

この S_n (の値) を関数 f のリーマン和という.

リーマン和を定義する.

実数 a, b について $a \leq b$ で, 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続で $a \leq x \leq b$ である各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

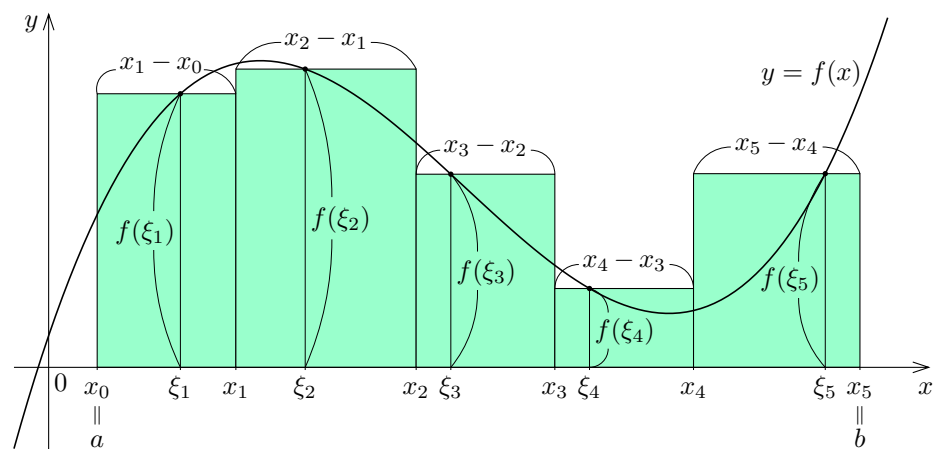
である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり, S_n を次のように定める:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

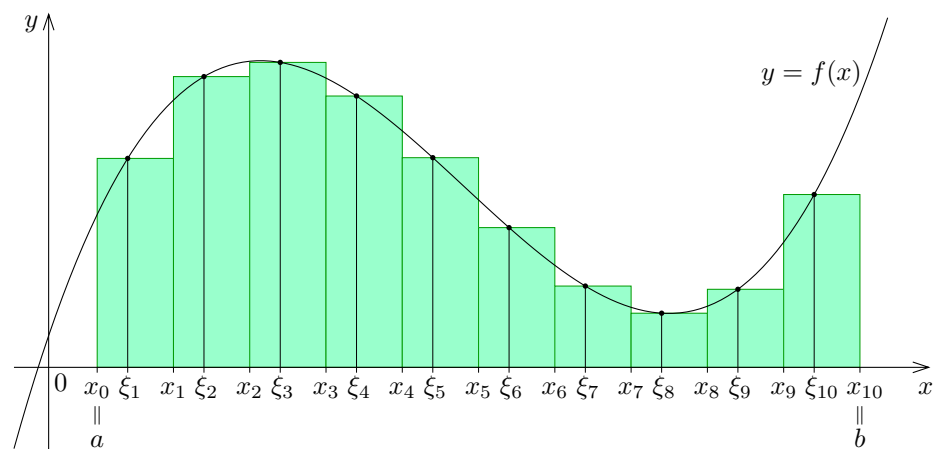
この S_n (の値) を関数 f のリーマン和という.

正の各自然数 n に対してリーマン和 S_n の値を定める.

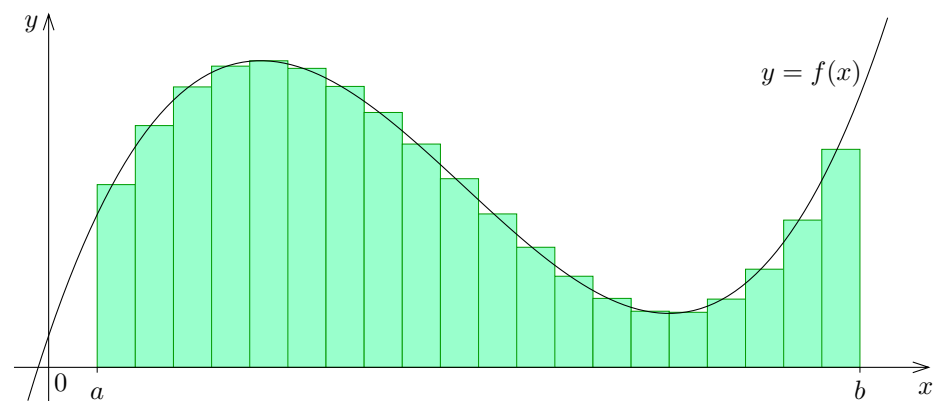
$n = 5$ として下図の 5 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_5 = \sum_{k=1}^5 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



$n = 10$ として下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である.



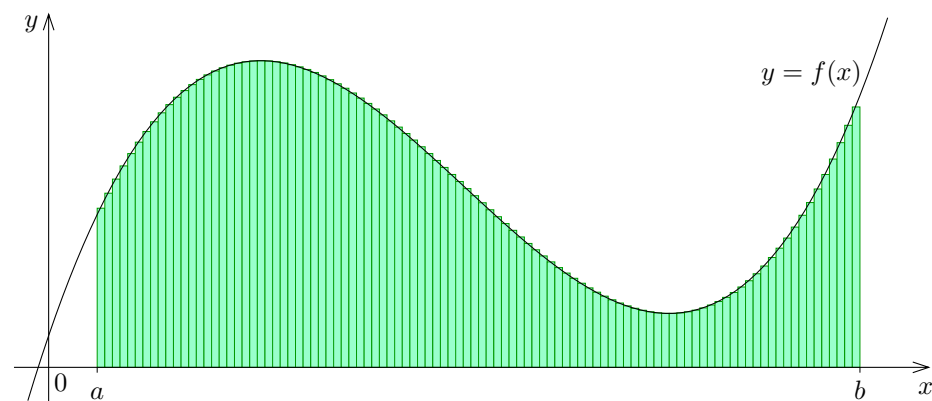
$n = 20$ として下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である.



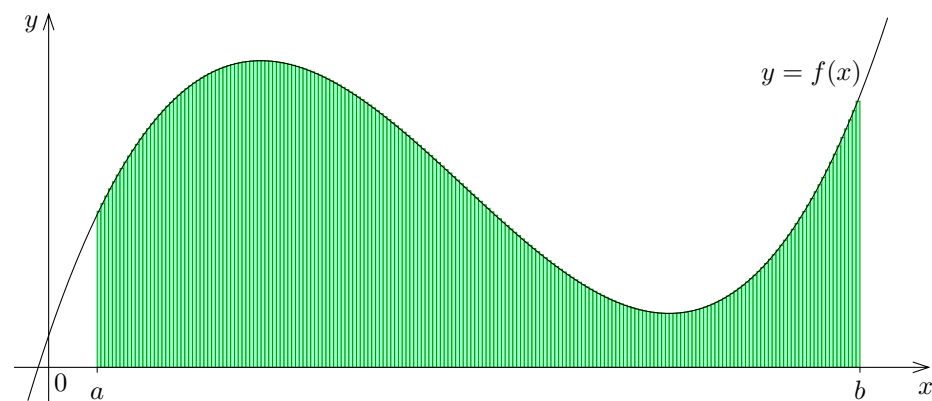
$n = 50$ として下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、その面積は関数 f のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である.



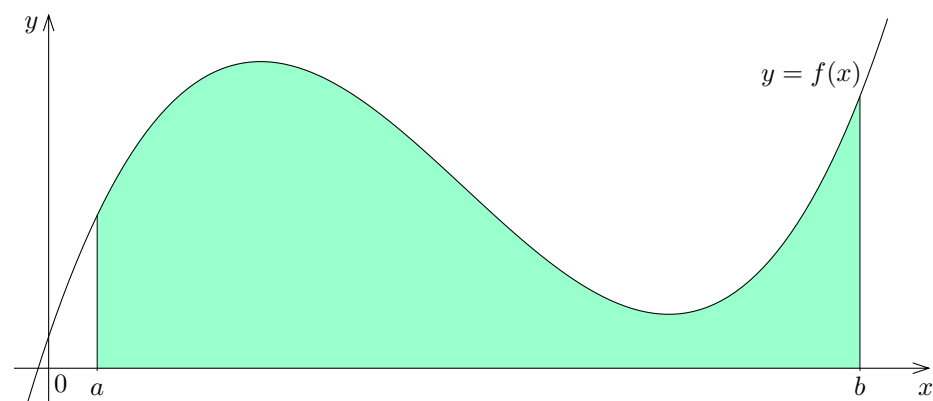
$n = 100$ として下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、
その面積は関数 f のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。

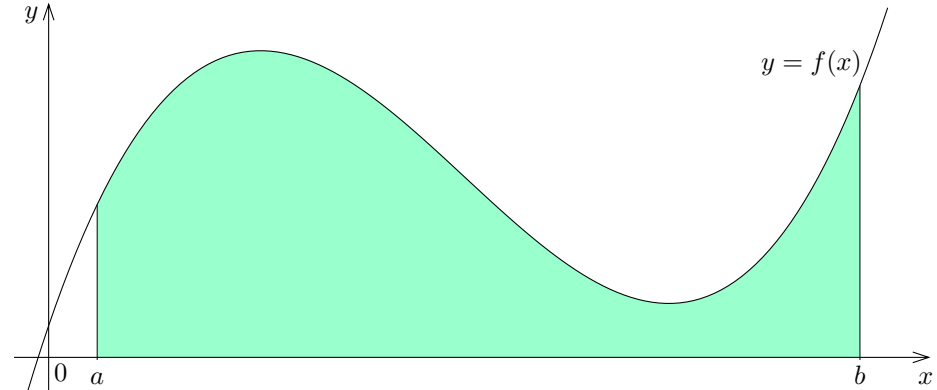


$n = 200$ として下図の 200 個の明緑色の長方形を併せた図形を考えると、
その面積は関数 f のリーマン和 $S_{200} = \sum_{k=1}^{200} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ である。



このような n 個の長方形を併せた図形の面積は、関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ であり、長方形を限りなく増やして個々の長方形を限りなく細くすると下図の f のグラフを境界線とする図形の面積に限りなく近づく。





関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき上図の f のグラフを境界線とする図形の面積に限りなく近づく. 故に上図の f のグラフを境界線とする図形の面積はリーマン和 S_n の $n \rightarrow \infty$ のときの極限值である.

ここで述べたような、境界線が曲線である図形の面積を長方形を併せた図形の面積で近似して、併せる長方形の個数を限りなく増やして長方形を限りなく細くして近似の精度を上げていくときの極限值として元の図形の面積を求める方法を区分求積法という。

関数の定積分を定義する.

実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表す :

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} .$$

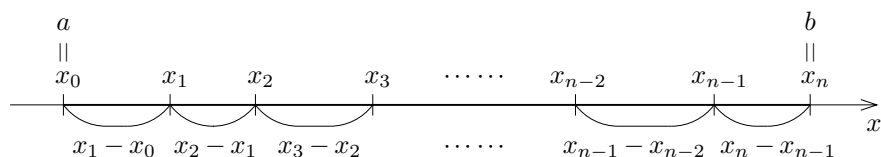
例えば次のようになる :

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5 , \quad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2} .$$

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする.
 正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する.



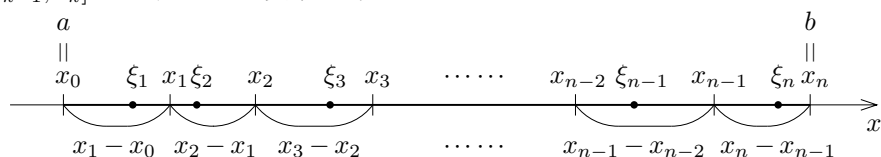
実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。
 正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する。更に、

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, x_2 \leq \xi_3 \leq x_3, \cdots, x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

である実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる。 ξ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数である。



区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく :

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく :

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

また, 各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

正の各自然数 n に対する S_n の値を f のリーマン和という.

区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく :

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

また, 各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

正の各自然数 n に対する S_n の値を f のリーマン和という. 変数 n の値に対して S_n の値を唯一つ定めるので, リーマン和 S_n は変数 n の関数である.

区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, $\cdots$, $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく:

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

また, 各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

正の各自然数 n に対する S_n の値を f のリーマン和という. 変数 n の値に対して S_n の値を唯一つ定めるので, リーマン和 S_n は変数 n の関数である.

実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができる.

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする ; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする ; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする . $n \rightarrow \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるとき, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする ; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. $n \rightarrow \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるとき, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

つまり, 大雑把にいうと, 関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限值である.

改めて定積分の定義を述べる. この定義は覚えなさい.

[定義] 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

と定める。変数 n の関数 S_n を f のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ である
どのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関
数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで
(定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を、 a から b
までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す： $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという.

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという. また, 定積分を表す式 $\int_a^b f(x) dx$ において, a を定積分の下端といい, b を定積分の上端といい, 区間 $[a, b]$ を積分区間という;

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという. また, 定積分を表す式 $\int_a^b f(x) dx$ において, a を定積分の下端といい, b を定積分の上端といい, 区間 $[a, b]$ を積分区間という; 更に, f を被積分関数といい, x を積分変数という.

関数は連続である範囲で積分可能である.

[定理] 実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるならば, f は a から b まで積分可能である.

ある条件を満たすリーマン和の極限値が定積分である。
ある条件というのは次のことである： $a \leq b$ である実数 a, b と、定義域が区間 $[a, b]$ を含む関数 f と、正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ を元にできる f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値を考えると、

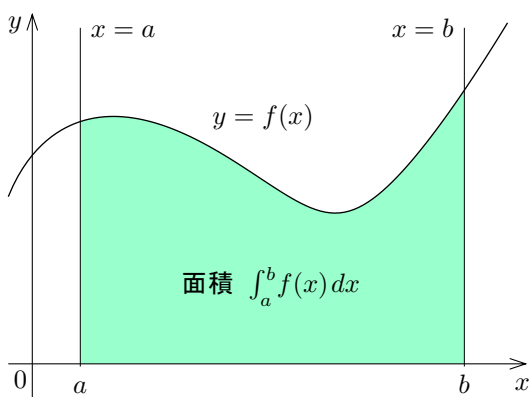
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

ある条件を満たすリーマン和の極限值が定積分である．前節で述べたように，座標平面における関数のグラフを境界線とする領域の面積は，この条件を満たすリーマン和の極限值で与えられる，つまり定積分で与えられる．

ある条件を満たすリーマン和の極限值が定積分である。前節で述べたように、座標平面における関数のグラフを境界線とする領域の面積は、この条件を満たすリーマン和の極限值で与えられる、つまり定積分で与えられる。

[定理] 実数 a, b について $a \leq b$ とする。関数 f は区間 $[a, b]$ において連続であり、区間 $[a, b]$ において $f(x) \geq 0$ とする。 xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x) dx$ である。



定積分について以下の定理が成り立つ.

[微分積分の基本定理] 関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする. a, b が属するある区間において, 関数 F が微分可能で $F'(x) = f(x)$ ならば, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
