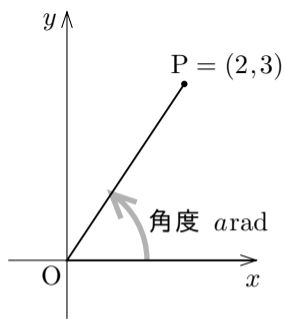


11. 拡充 3 逆正接関数の利用

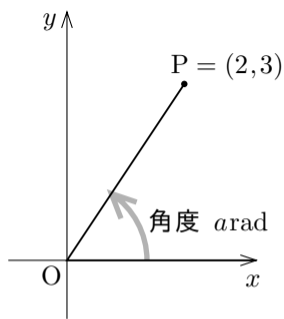
例 xy 座標平面における点 $P = (2,3)$ に対して，原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく． $-\pi < a \leq \pi$ とする．このような実数 a を一つ求める．



例 xy 座標平面における点 $P = (2,3)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく. $-\pi < a \leq \pi$ とする. このような実数 a を一つ求める.

$$\tan a = \quad ,$$

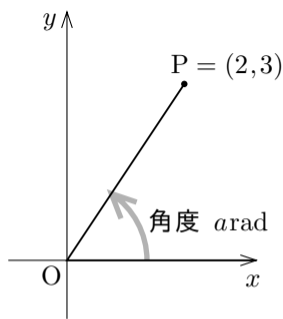
$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1} \quad .$$



例 xy 座標平面における点 $P = (2,3)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく。 $-\pi < a \leq \pi$ とする。このような実数 a を一つ求める。

$$\tan a = \frac{3}{2},$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1} \frac{3}{2}.$$

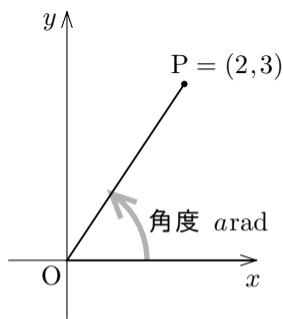


例 xy 座標平面における点 $P = (2,3)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく。
 $-\pi < a \leq \pi$ とする。このような実数 a を一つ求める。

$$\tan a = \frac{3}{2},$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1} \frac{3}{2}.$$

点 P の x 座標が正なので、 $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$.



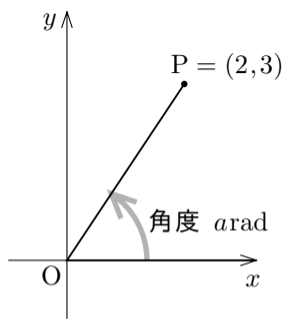
例 xy 座標平面における点 $P = (2, 3)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく。
 $-\pi < a \leq \pi$ とする。このような実数 a を一つ求める。

$$\tan a = \frac{3}{2},$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1} \frac{3}{2}.$$

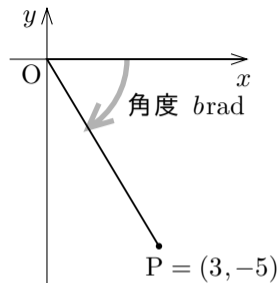
点 P の x 座標が正なので、 $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$. 故に

$$a = \tan^{-1} \frac{3}{2} .$$



終

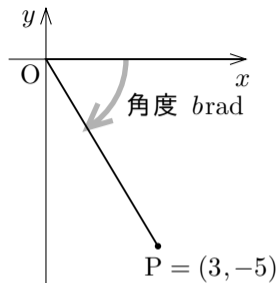
例 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求める.



例 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求める.

$$\tan b = \quad = \quad ,$$

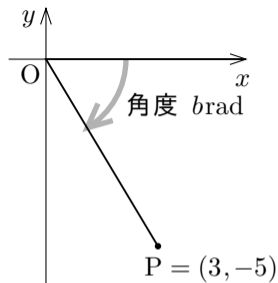
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}(\quad) = -\tan^{-1} \quad .$$



例 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求める.

$$\tan b = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}.$$

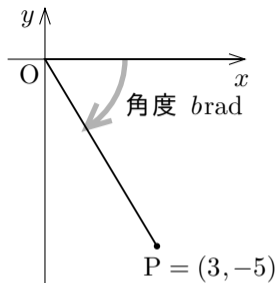


例 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求める.

$$\tan b = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}.$$

点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan b) = b$.



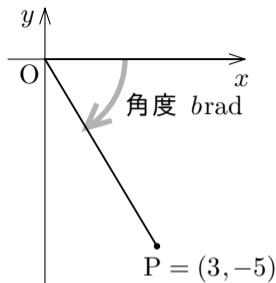
例 xy 座標平面における点 $P = (3, -5)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $b\text{rad}$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求める.

$$\tan b = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{5}{3}.$$

点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < b < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan b) = b$. 故に

$$b = -\tan^{-1}\frac{5}{3}.$$



終

問11.補遺3.1 xy 座標平面における点

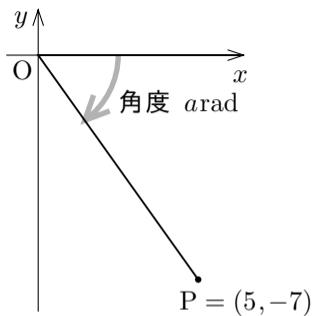
$P = (5, -7)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく. $-\pi < a \leq \pi$ とする. このような実数 a を一つ求めよ.

$$\tan a = \quad = \quad ,$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\left(\quad\right) = \quad .$$

点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan a) = \quad$. 故に

$$a = \quad .$$



問11.補遺3.1 xy 座標平面における点

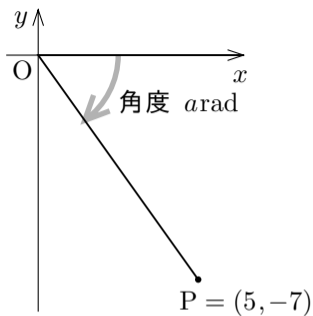
$P = (5, -7)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $a\text{rad}$ (a は実数) とおく. $-\pi < a \leq \pi$ とする. このような実数 a を一つ求めよ.

$$\tan a = \frac{-7}{5} = -\frac{7}{5},$$

$$\tan^{-1}(\tan a) = \tan^{-1}\left(-\frac{7}{5}\right) = -\tan^{-1}\frac{7}{5}.$$

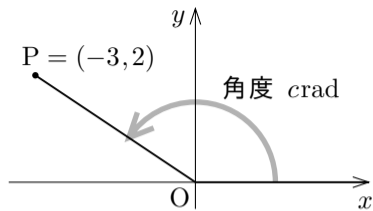
点 P の x 座標が正なので, $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$, よって $\tan^{-1}(\tan a) = a$. 故に

$$a = -\tan^{-1}\frac{7}{5}.$$

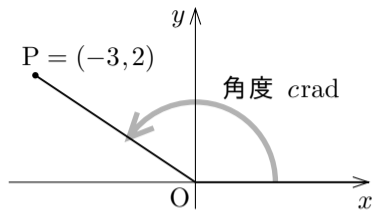


終

例 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. このような実数 c を一つ求める.



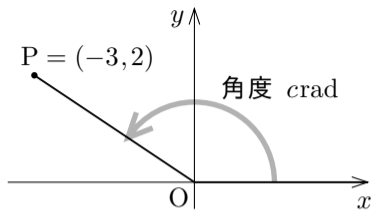
例 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. このような実数 c を一つ求める.



$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}.$$

例 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. このような実数 c を一つ求める.

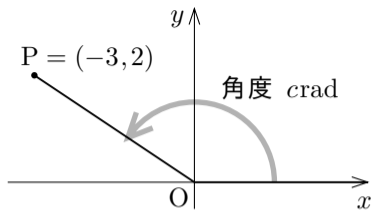


$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3},$$

$-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan c) = c$ だが、 $c > \frac{\pi}{2}$ なので、 $\tan^{-1}(\tan c)$ を c に変形できない. $\tan c = \tan(c - \pi)$ なので、 $\tan^{-1}\{\tan(c - \pi)\}$ を考える.

例 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. このような実数 c を一つ求める.



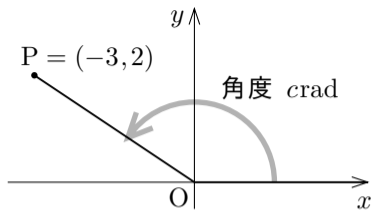
$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}.$$

$\frac{\pi}{2} < c \leq \pi$ なので $-\frac{\pi}{2} < c - \pi \leq 0$, よって

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c - \pi)\} = c - \pi.$$

例 xy 座標平面における点 $P = (-3, 2)$ に対して、原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $c\text{rad}$ (c は実数) とおく. $-\pi < c \leq \pi$ とする. このような実数 c を一つ求める.



$$\tan c = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3},$$

$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\tan^{-1}\frac{2}{3}.$$

$\frac{\pi}{2} < c \leq \pi$ なので $-\frac{\pi}{2} < c - \pi \leq 0$, よって

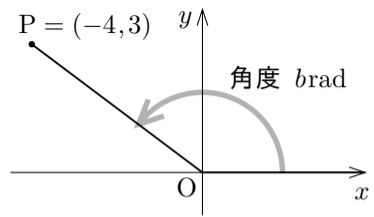
$$\tan^{-1}(\tan c) = \tan^{-1}\{\tan(c - \pi)\} = c - \pi.$$

従って $c - \pi = -\tan^{-1}\frac{2}{3}$ なので, $c = \pi - \tan^{-1}\frac{2}{3}$.

問11.補遺3.2

xy 座標平面における点

$P = (-4, 3)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を b rad (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求めよ.



$$\tan b = \quad ,$$

$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(\quad \right) = \quad .$$

$\frac{\pi}{2} < b < \pi$ なので $-\frac{\pi}{2} < \quad < 0$, よって

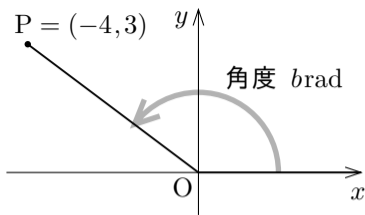
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\{\tan(\quad)\} = \quad .$$

従って $\quad = \quad$ なので, $b = \quad$.

問11.補遺3.2

xy 座標平面における点

$P = (-4, 3)$ に対して, 原点 O を極として x 軸の向きに伸びる始線 Ox に対する線分 OP の弧度法による角度を $brad$ (b は実数) とおく. $-\pi < b \leq \pi$ とする. このような実数 b を一つ求めよ.



$$\tan b = -\frac{3}{4},$$

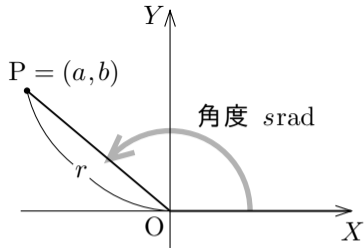
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4}.$$

$\frac{\pi}{2} < b < \pi$ なので $-\frac{\pi}{2} < b - \pi < 0$, よって

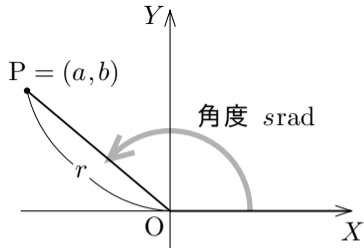
$$\tan^{-1}(\tan b) = \tan^{-1}\{\tan(b - \pi)\} = b - \pi.$$

従って $b - \pi = -\tan^{-1}\frac{3}{4}$ なので, $b = \pi - \tan^{-1}\frac{3}{4}$.

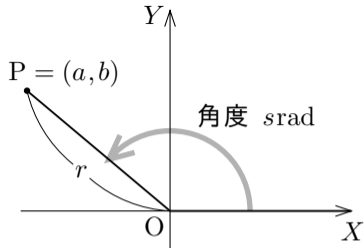
定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\text{rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく.



定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\text{rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく. $P = (r \cos s, r \sin s)$ なので, $a = r \cos s$ かつ $b = r \sin s$.



定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s \text{ rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とお



く. $P = (r \cos s, r \sin s)$ なので, $a = r \cos s$ かつ $b = r \sin s$. よって, 各実数 x に対して,

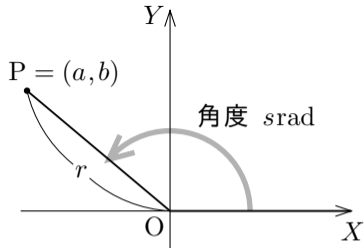
$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s)$$

=

.

定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\text{rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく. $P = (r \cos s, r \sin s)$ なので, $a = r \cos s$ かつ $b = r \sin s$. よって, 各実数 x に対して,

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) \\ &= r \sin(x + s). \end{aligned}$$

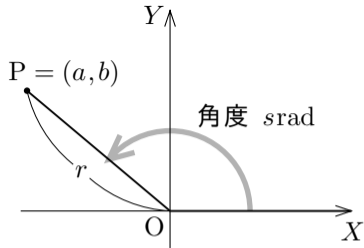


定数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. XY 座標平面における点 $P = (a, b)$ に対して, 原点 $O = (0, 0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s \text{ rad}$ (s は実数) とおき, $r = \overline{OP}$ とおく. $P = (r \cos s, r \sin s)$ なので, $a = r \cos s$ かつ $b = r \sin s$. よって, 各実数 x に対して,

$$\begin{aligned} a \sin x + b \cos x &= r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) \\ &= r \sin(x + s). \end{aligned}$$

$r = \overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2}$ なので,

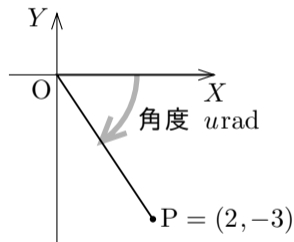
$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + s).$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

$$2\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s) .$$

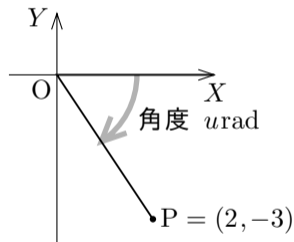
例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x+u) . \end{aligned}$$



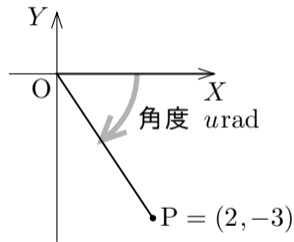
例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} .$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

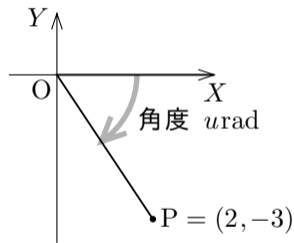
任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} .$$

$$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \tan^{-1}(\tan u) = u , \quad \text{よって} \quad u = -\tan^{-1}\frac{3}{2} .$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

任意の実数 x について

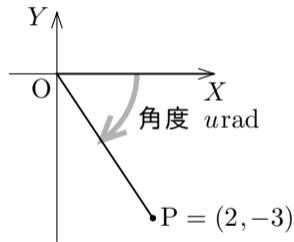
$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} .$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$, よって $u = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$. 故に

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) .$$



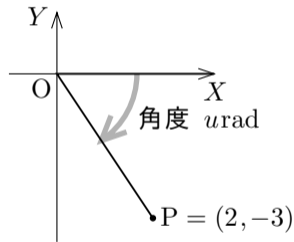
例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $2\sin x - 3\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (2, -3)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい.

任意の実数 x について

$$\begin{aligned} 2\sin x - 3\cos x &= \sqrt{2^2 + (-3)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{13} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{2} .$$



$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$, よって $u = -\tan^{-1}\frac{3}{2}$. 故に

$$2\sin x - 3\cos x = \sqrt{13} \sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{2}\right) . \quad r = \sqrt{13} \quad \text{かつ} \quad s = -\tan^{-1}\frac{3}{2} . \quad \boxed{\text{終}}$$

問11.補遺3.3 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (4, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u \text{ rad}$ (u は実数) とおく． $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい． 任意の実数 x について

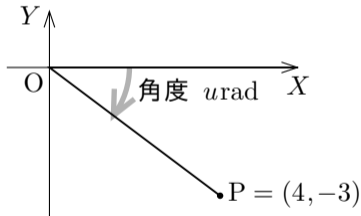
$$\begin{aligned} 4\sin x - 3\cos x &= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} \sin(x + \quad) \\ &= \sin(x + \quad) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{\quad}{\quad} = \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(\frac{\quad}{\quad}\right) = \quad .$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$, よって $u = \quad$. 故に

$$4\sin x - 3\cos x = \sin\left(x + \quad\right) . \quad r = \quad \text{かつ} \quad s = \quad .$$



問11.補遺3.3 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について

$$4\sin x - 3\cos x = r \sin(x + s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (4, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u \text{ rad}$ (u は実数) とおく． $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい． 任意の実数 x について

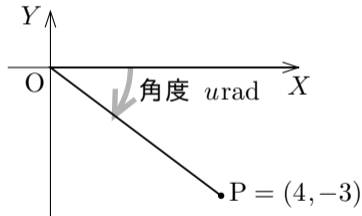
$$\begin{aligned} 4\sin x - 3\cos x &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \sin(x + u) \\ &= 5 \sin(x + u) . \end{aligned}$$

$\tan u = \quad = \quad$ なので，

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}(\quad) = \quad .$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$ ， よって $u = \quad$. 故に

$$4\sin x - 3\cos x = \sin\left(x \quad\right) . \quad r = \quad \text{かつ} \quad s = \quad .$$



問11.補遺3.3 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について $4\sin x - 3\cos x = r\sin(x + s)$.

XY 座標平面における点 $P = (4, -3)$ に対して，原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく． $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ としてよい． 任意の実数 x について

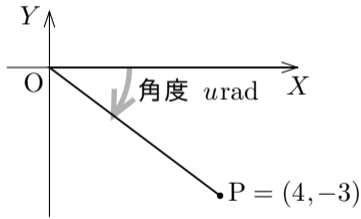
$$\begin{aligned} 4\sin x - 3\cos x &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} \sin(x + u) \\ &= 5\sin(x + u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\tan^{-1}\frac{3}{4} .$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}(\tan u) = u$, よって $u = -\tan^{-1}\frac{3}{4}$. 故に

$$4\sin x - 3\cos x = 5\sin\left(x - \tan^{-1}\frac{3}{4}\right) . \quad r = 5 \quad \text{かつ} \quad s = -\tan^{-1}\frac{3}{4} .$$

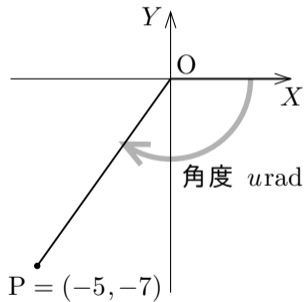


終

例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について

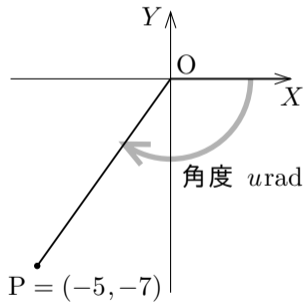
$$-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x + s) .$$

例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい.



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

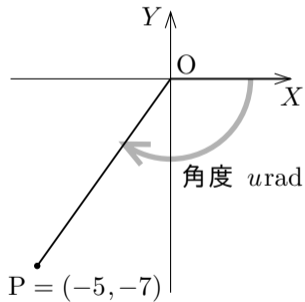
$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x+u) . \end{aligned}$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{なので,} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1} \frac{7}{5} .$$



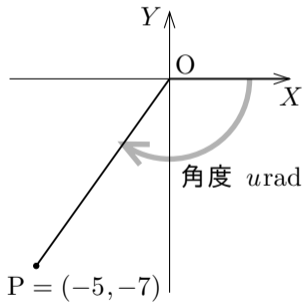
例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{なので,} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\frac{7}{5} .$$

$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ ならば $\tan^{-1}(\tan u) = u$ だが,

$u < -\frac{\pi}{2}$ なので, $\tan^{-1}(\tan u)$ を u に変形できない. $\tan u = \tan(u+\pi)$ なので, $\tan^{-1}\{\tan(u+\pi)\}$ を考える.



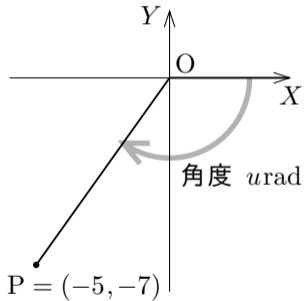
例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{なので,} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1} \frac{7}{5} .$$

$$-\pi < u < -\frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad 0 < u + \pi < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u + \pi)\} = u + \pi .$$



例 次のような実数 r, s の組を一つ求める：任意の実数 x について $-5\sin x - 7\cos x = r\sin(x+s)$. XY 座標平面における点 $P = (-5, -7)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

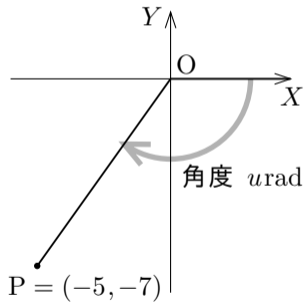
$$\begin{aligned} -5\sin x - 7\cos x &= \sqrt{(-5)^2 + (-7)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{74} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5} \quad \text{なので,} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1} \frac{7}{5} .$$

$$-\pi < u < -\frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad 0 < u + \pi < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u + \pi)\} = u + \pi .$$

$$\text{よって} \quad u + \pi = \tan^{-1} \frac{7}{5} \quad \text{なので,} \quad u = \tan^{-1} \frac{7}{5} - \pi .$$



故に $-5\sin x - 7\cos x = \sqrt{74}\sin\left(x + \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi\right)$. $r = \sqrt{74}$ かつ

$$s = \tan^{-1}\frac{7}{5} - \pi .$$

終

問11.補遺3.4 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について

$$-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (-7, -4)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u \text{ rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

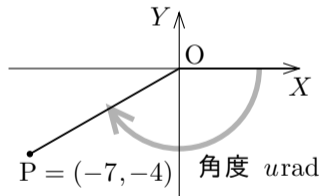
$$\begin{aligned} -7\sin x - 4\cos x &= \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} \sin(x \quad) \\ &= \sqrt{\quad} \sin(x \quad) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \quad \quad \text{なので} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \quad .$$

$$-\pi < u < -\frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad 0 < u \quad < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u \quad)\} = u \quad ,$$

よって $u = \quad$ なので, $u = \quad$. 故に



問11.補遺3.4 次のような実数 r, s の組を一つ求めよ：任意の実数 x について

$$-7\sin x - 4\cos x = r\sin(x+s) .$$

XY 座標平面における点 $P = (-7, -4)$ に対して、原点 O を極として X 軸の向きに伸びる始線 OX に対する線分 OP の弧度法による角度を $u\text{rad}$ (u は実数) とおく. $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ としてよい. 任意の実数 x について

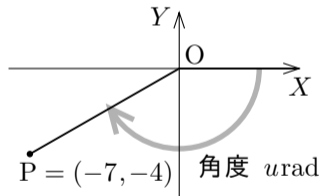
$$\begin{aligned} -7\sin x - 4\cos x &= \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2} \sin(x+u) \\ &= \sqrt{65} \sin(x+u) . \end{aligned}$$

$$\tan u = \frac{4}{7} \quad \text{なので} \quad \tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\frac{4}{7} .$$

$$-\pi < u < -\frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad 0 < u + \pi < \frac{\pi}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\tan^{-1}(\tan u) = \tan^{-1}\{\tan(u + \pi)\} = u + \pi ,$$

$$\text{よって} \quad u + \pi = \tan^{-1}\frac{4}{7} \quad \text{なので,} \quad u = \tan^{-1}\frac{4}{7} - \pi . \quad \text{故に}$$



$$-7\sin x - 4\cos x = \sqrt{65} \sin\left(x + \tan^{-1}\frac{4}{7} - \pi\right) .$$

$$r = \sqrt{65} \quad \text{かつ} \quad s = \tan^{-1}\frac{4}{7} - \pi .$$

終