11.9 三角関数の諸公式

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \sin(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \pm \cos(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad \text{（複号同順）}.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \sin(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \pm \cos(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで

$$\sin(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \sin\{(a \pm b)\mathrm{rad}\} = \sin(a \pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\sin(a\mathrm{rad}) = \sin a\ , \qquad \cos(a\mathrm{rad}) = \cos a\ ,$$

$$\sin(b\mathrm{rad}) = \sin b\ , \qquad \cos(b\mathrm{rad}) = \cos b\ ,$$

　任意の一般角 α, β について，正弦の加法定理より，

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\sin(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \sin(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \pm \cos(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad （複号同順）.$$

ここで

$$\sin(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \sin\{(a \pm b)\mathrm{rad}\} = \sin(a \pm b) \quad （複号同順）,$$

$$\sin(a\mathrm{rad}) = \sin a \ , \qquad \cos(a\mathrm{rad}) = \cos a \ ,$$

$$\sin(b\mathrm{rad}) = \sin b \ , \qquad \cos(b\mathrm{rad}) = \cos b \ ,$$

よって

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b \quad （複号同順）.$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \cos(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \mp \sin(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad （複号同順）.$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \cos(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \mp \sin(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad （複号同順）.$$

ここで

$$\cos(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \cos\{(a \pm b)\mathrm{rad}\} = \cos(a \pm b) \quad （複号同順）,$$

$$\sin(a\mathrm{rad}) = \sin a \ , \qquad \cos(a\mathrm{rad}) = \cos a \ ,$$

$$\sin(b\mathrm{rad}) = \sin b \ , \qquad \cos(b\mathrm{rad}) = \cos b \ ,$$

任意の一般角 α, β について，余弦の加法定理より，

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \quad （複号同順）.$$

任意の実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び任意の実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，

$$\cos(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \cos(a\mathrm{rad})\cos(b\mathrm{rad}) \mp \sin(a\mathrm{rad})\sin(b\mathrm{rad}) \quad （複号同順）.$$

ここで

$$\cos(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \cos\{(a \pm b)\mathrm{rad}\} = \cos(a \pm b) \quad （複号同順）,$$

$$\sin(a\mathrm{rad}) = \sin a \ , \qquad \cos(a\mathrm{rad}) = \cos a \ ,$$

$$\sin(b\mathrm{rad}) = \sin b \ , \qquad \cos(b\mathrm{rad}) = \cos b \ ,$$

よって

$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b \quad （複号同順）.$$

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad （複号同順）.$$

角度 α, β は度数法で表しても弧度法で表してもよい.

一般角 α,β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\mathrm{rad})$，$\tan(b\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\mathrm{rad}+b\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\mathrm{rad}-b\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\mathrm{rad}\pm b\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\mathrm{rad})\pm\tan(b\mathrm{rad})}{1\mp\tan(a\mathrm{rad})\tan(b\mathrm{rad})} \quad \text{（複号同順）}.$$

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{（複号同順）}.$$

実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\mathrm{rad})$，$\tan(b\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\mathrm{rad}+b\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\mathrm{rad}-b\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\mathrm{rad}\pm b\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\mathrm{rad})\pm\tan(b\mathrm{rad})}{1\mp\tan(a\mathrm{rad})\tan(b\mathrm{rad})} \quad \text{（複号同順）}.$$

ここで，

$$\tan(a\mathrm{rad}\pm b\mathrm{rad}) = \tan\{(a\pm b)\mathrm{rad}\} = \tan(a\pm b) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\tan(a\mathrm{rad}) = \tan a\ , \qquad \tan(b\mathrm{rad}) = \tan b\ ,$$

一般角 α, β について，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，及び $\tan(\alpha+\beta)$ あるいは $\tan(\alpha-\beta)$ の値があるとき，正接の加法定理より，

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta} \quad （複号同順）.$$

実数 a に対する一般角 $a\mathrm{rad}$ 及び実数 b に対する一般角 $b\mathrm{rad}$ について，$\tan(a\mathrm{rad})$，$\tan(b\mathrm{rad})$，及び $\tan(a\mathrm{rad}+b\mathrm{rad})$ あるいは $\tan(a\mathrm{rad}-b\mathrm{rad})$ の値があるとき，

$$\tan(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \frac{\tan(a\mathrm{rad}) \pm \tan(b\mathrm{rad})}{1 \mp \tan(a\mathrm{rad})\tan(b\mathrm{rad})} \quad （複号同順）.$$

ここで，

$$\tan(a\mathrm{rad} \pm b\mathrm{rad}) = \tan\{(a \pm b)\mathrm{rad}\} = \tan(a \pm b) \quad （複号同順），$$

$$\tan(a\mathrm{rad}) = \tan a \ , \qquad \tan(b\mathrm{rad}) = \tan b \ ,$$

よって

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b} \quad （複号同順）.$$

[定理正弦関数・余弦関数の加法定理]　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \text{（複号同順）},$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad \text{（複号同順）}.$$

[定理正接関数の加法定理]　実数 a と b とについて，$\tan a$，$\tan b$，及び $\tan(a+b)$ あるいは $\tan(a-b)$ の値があるとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad \text{（複号同順）}.$$

これらの三角関数の加法定理は覚えること．

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$\boxed{例}$　実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \ ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \quad 0$ なので，

$$\sin x =$$

$\boxed{例}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

例　実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y =$$

例　実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} ,$$

$\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ より $\cos y \quad 0$ なので，

$$\cos y =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 x について $3\pi \leq x \leq 4\pi$ ，$\cos x = \dfrac{3}{4}$ とする．実数 y について $\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ ，$\sin y = -\dfrac{1}{3}$ とする． $\sin(x+y)$ 及び $\cos(x+y)$ を計算する．

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} ,$$

$3\pi \leq x \leq 4\pi$ より $\sin x \leq 0$ なので，

$$\sin x = -\sqrt{\frac{7}{16}} = -\frac{\sqrt{7}}{4} .$$

また，

$$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} ,$$

$\dfrac{3\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{5\pi}{2}$ より $\cos y \geq 0$ なので，

$$\cos y = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ , \qquad \cos x = \frac{3}{4} \ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3} \ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}\ , \qquad \cos x = \frac{3}{4}\ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3}\ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y = -\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{14}}{6} - \frac{1}{4}\ .\end{aligned}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4} \ , \qquad \cos x = \frac{3}{4} \ , \qquad \sin y = -\frac{1}{3} \ , \qquad \cos y = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{\sqrt{7}}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{14}}{6} - \frac{1}{4} \ . \end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{3}{4}\frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{7}}{12} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{問 11.9.1}$ 実数 a について $\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \dfrac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a =$$

$\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ より $\cos a \quad 0$ なので，

$$\cos a =$$

また，

$$\sin^2 b =$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \quad 0$ なので，

$$\sin b =$$

$\boxed{問11.9.1}$ 実数 a について $\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \frac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\frac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a \,=\, 1 - \sin^2 a \,=\, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \,=\, 1 - \frac{25}{36} \,=\, \frac{11}{36} \;,$$

$\frac{5\pi}{2} \leq a \leq \frac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので，

$$\cos a \,=\, -\sqrt{\frac{11}{36}} \,=\, -\frac{\sqrt{11}}{6} \;.$$

また，

$$\sin^2 b \,=\, wht1 - \cos^2 b$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \quad 0$ なので，

$$\sin b \,=\,$$

$\boxed{問 11.9.1}$ 実数 a について $\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ ，$\sin a = \dfrac{5}{6}$ とする．実数 b について $2\pi \leq b \leq 3\pi$ ，$\cos b = -\dfrac{2}{3}$ とする． $\sin(a+b)$ 及び $\cos(a+b)$ を計算せよ．

$$\cos^2 a \,=\, 1 - \sin^2 a \,=\, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \,=\, 1 - \frac{25}{36} \,=\, \frac{11}{36} \ ,$$

$\dfrac{5\pi}{2} \leq a \leq \dfrac{7\pi}{2}$ より $\cos a \leq 0$ なので，

$$\cos a \,=\, -\sqrt{\frac{11}{36}} \,=\, -\frac{\sqrt{11}}{6} \ .$$

また，

$$\sin^2 b \,=\, 1 - \cos^2 b \,=\, 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \,=\, 1 - \frac{4}{9} \,=\, \frac{5}{9} \ ,$$

$2\pi \leq b \leq 3\pi$ より $\sin b \geq 0$ なので，

$$\sin b \,=\, \sqrt{\frac{5}{9}} \,=\, \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

$$\sin a = \frac{5}{6}\ , \qquad \cos a = -\frac{\sqrt{11}}{6}\ , \qquad \sin b = \frac{\sqrt{5}}{3}\ , \qquad \cos b = -\frac{2}{3}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= -\frac{10+\sqrt{55}}{18}\ .\end{aligned}$$

余弦関数の加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b = -\frac{\sqrt{11}}{6}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{6}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{11}-5\sqrt{5}}{18}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数 a について $\tan a = 3$ とし，実数 b について $\tan b = 7$ とする．$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する．正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(a+b) =$$

$$\tan(a-b) =$$

$\boxed{例}$ 実数 a について $\tan a = 3$ とし，実数 b について $\tan b = 7$ とする．$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する．正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2} \ .$$

$$\tan(a-b) =$$

例 実数 a について $\tan a = 3$ とし，実数 b について $\tan b = 7$ とする．$\tan(a+b)$ 及び $\tan(a-b)$ を計算する．正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2} \ .$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{3-7}{1+3\cdot 7} = \frac{-4}{22} = -\frac{2}{11} \ .$$

終

$\boxed{問 11.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) =$$

$$\tan(x-y) =$$

$\boxed{\text{問}11.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\dfrac{2}{7} + 3}{1 - \dfrac{2}{7} \cdot 3} = 23 \quad .$$

$$\tan(x-y) =$$

$\boxed{問11.9.2}$ 実数 x について $\tan x = \dfrac{2}{7}$ とし，実数 y について $\tan y = 3$ とする． $\tan(x+y)$ 及び $\tan(x-y)$ を計算せよ．

正接関数の加法定理を用いる．

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{2}{7} + 3}{1 - \frac{2}{7} \cdot 3} = 23 \ .$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} = \frac{\frac{2}{7} - 3}{1 + \frac{2}{7} \cdot 3} = -\frac{19}{13} \ .$$

$\boxed{終}$

定理 （正弦関数・余弦関数の加法定理）　任意の実数 a と b とについて，

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b \quad \text{（複号同順）},$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \quad \text{（複号同順）}.$$

定理（正接関数の加法定理）　実数 a と b とについて，$\tan a$，$\tan b$，及び $\tan(a+b)$ あるいは $\tan(a-b)$ の値が存在するとき，

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \quad \text{（複号同順）}.$$

三角関数の加法定理から幾つかの公式を導く.

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a \ ,$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

　実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において　$b = a$　とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$　より　$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$　なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b=a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

において $b = a$ とすると，

$$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \ .$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1 \ ,$$

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ より $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$ なので，

$$\cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

故に

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

　実数 a, b について，正接関数の加法定理の等式

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

において　$b = a$　とすると

$$\tan(a+a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \tan a} \ ,$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \ .$$

[定理 11.9.1]　任意の実数 a について,

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \ ,$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ ,$$

a が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でも $\dfrac{\pi}{4}$ の奇数倍でもないとき　$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

任意の実数 a について，

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\ .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \ ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ .$$

任意の実数 a について,

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より,

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \ ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より,

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

任意の実数 a について，

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ .$$

$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ より，

$$2\sin^2 a = 1 - \cos 2a \ ,$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ .$$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ より，

$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

[定理 11.9.2] 任意の実数 a について，

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} \ , \qquad \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する．

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) + \cos(a-b) =} \end{array}$$

実数 a,b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{lr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ + & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b} \end{array}$$

よって

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\} \ .$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b\ , \quad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する．

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \cos(a+b)-\cos(a-b) = & \end{array}$$

実数 a, b について，余弦関数の加法定理の等式

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \ , \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

について左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \sin a \sin b} \end{array}$$

よって

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ .$$

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b\ , \quad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b)+\sin(a-b) =} \end{array}$$

実数 a, b について，正弦関数の加法定理の等式

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b\ ,\quad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

について左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b} \end{array}$$

よって

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}\ .$$

[定理 11.9.3]　任意の実数 a と b とについて,

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

例 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

例 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7) = \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\} + \cos\{(3x+2)-(5x-7)\}]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$$

例 変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

$$
\begin{aligned}
\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\}+\cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\
&= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(-2x+9)\}\ .
\end{aligned}
$$

例　変数 x の式 $\cos(3x+2)\cos(5x-7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形する.

$$\begin{aligned}\cos(3x+2)\cos(5x-7) &= \frac{1}{2}[\cos\{(3x+2)+(5x-7)\}+\cos\{(3x+2)-(5x-7)\}] \\ &= \frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(-2x+9)\}\ ,\end{aligned}$$

ここで $\cos(-2x+9)=\cos\{-(2x-9)\}=\cos(2x-9)$ なので,

$$\cos(3x+2)\cos(5x-7)=\frac{1}{2}\{\cos(8x-5)+\cos(2x-9)\}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}11.9.3}$ 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$\boxed{\text{問}11.9.3}$ 変数 x の式 $\sin(2x+1)\cos(5x+7)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin(2x+1)\cos(5x+7) &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8)+\sin(-3x-6)\}\\ &= \frac{1}{2}[\sin(7x+8)+\sin\{-(3x+6)\}]\\ &= \frac{1}{2}\{\sin(7x+8)-\sin(3x+6)\}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}11.9.4}$ 変数 x の式 $\sin(3x-5)\sin(6x-1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$\boxed{問11.9.4}$ 変数 x の式 $\sin(3x-5)\sin(6x-1)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の和か差の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}\sin(3x-5)\sin(6x-1) &= -\frac{1}{2}\{\cos(9x-6)-\cos(-3x-4)\}\\ &= -\frac{1}{2}[\cos(9x-6)-\cos\{-(3x+4)\}]\\ &= \frac{1}{2}\{\cos(3x+4)-\cos(9x-6)\}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

実数 a,b について，

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a \ , \quad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b \ ;$$

つまり，

$$a = \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2} \ , \quad b = \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a,b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a + \sin b =$$

実数 a, b について，

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より，

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する．

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について，

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より，

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a - \sin b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

実数 a, b について，

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

余弦関数の加法定理より，

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する．

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a + \cos b =$$

実数 a,b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし足し算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ + & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

実数 a,b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - & \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\cos a - \cos b =$$

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \ .$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \cos a = \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - \sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ - & \cos b = \cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + \sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ \hline & \cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \end{array}$$

[定理 11.9.4]　任意の実数 a と b とについて,

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad ,$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \quad ,$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \quad ,$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \quad .$$

$\boxed{例}$ 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4)=2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$\boxed{例}$ 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

$$\begin{aligned}\sin(2x-5)-\sin(7x+4) &= 2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}\\ &= 2\cos\frac{9x-1}{2}\sin\frac{-5x-9}{2} \quad .\end{aligned}$$

例 変数 x の式 $\sin(2x-5)-\sin(7x+4)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形する.

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4) = 2\cos\frac{2x-5+7x+4}{2}\sin\frac{2x-5-(7x+4)}{2}$$
$$= 2\cos\frac{9x-1}{2}\sin\frac{-5x-9}{2}\ .$$

ここで $\sin\dfrac{-5x-9}{2} = \sin\left(-\dfrac{5x+9}{2}\right) = -\sin\dfrac{5x+9}{2}$ なので,

$$\sin(2x-5)-\sin(7x+4) = -2\sin\frac{5x+9}{2}\cos\frac{9x-1}{2}\ .$$

終

$\boxed{問11.9.5}$ 変数 x の式 $\cos(2x+1)-\cos(5x+8)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

$\boxed{問11.9.5}$ 変数 x の式 $\cos(2x+1)-\cos(5x+8)$ を x の 1 次式の正弦・余弦の積の定数倍の形に変形せよ.

$$\begin{aligned}
\cos(2x+1)-\cos(5x+8) &= -2\sin\frac{7x+9}{2}\sin\frac{-3x-7}{2} \\
&= -2\sin\frac{7x+9}{2}\sin\left(-\frac{3x+7}{2}\right) \\
&= -2\sin\frac{7x+9}{2}\left(-\sin\frac{3x+7}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{3x+7}{2}\sin\frac{7x+9}{2} \quad .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

例 変数 x の式 $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にする.

$\boxed{例}$ 変数 x の式 $\cos x+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にする.

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\frac{x+x+\dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$\boxed{例}$ 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にする.

$$
\begin{aligned}
\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{x + x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)}{2} \\
&= 2\cos\frac{2x + \dfrac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\dfrac{\pi}{3}}{2} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}
\end{aligned}
$$

例 変数 x の式 $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にする.

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\cos\frac{x + x + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\
&= 2\cos\frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\frac{\pi}{3}}{2} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\
&= 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) .
\end{aligned}$$

終

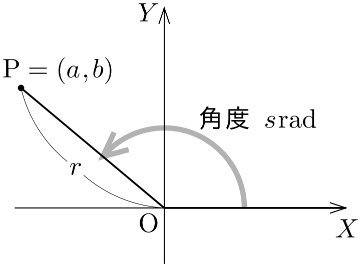
$\boxed{\text{問}11.9.6}$ 変数 x の式 $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にしなさい.

$\boxed{問 11.9.6}$ 変数 x の式 $\sin x + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を計算して正弦または余弦のどちらか一方だけが現れる式にしなさい.

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin\frac{x + x + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \\
&= 2\sin\frac{2x + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{-\frac{\pi}{3}}{2} \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

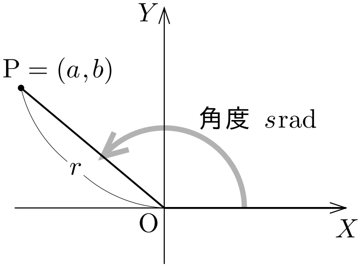
　定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P}=(a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O}=(0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（s は実数）とおき，$r=\overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので，



$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$，よって $r>0$．三角関数の定義より $\sin s=\dfrac{b}{r}$，$\cos s=\dfrac{a}{r}$ なので，

$$a=r\cos s\ , \qquad b=r\sin s\ .$$

定数 a と b とについて $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とおき，$r = \overline{\mathrm{OP}}$ とおく．$a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので，



$\mathrm{P} \neq \mathrm{O}$ ，よって $r > 0$ ．三角関数の定義より $\sin s = \dfrac{b}{r}$ ，$\cos s = \dfrac{a}{r}$ なので，

$$a = r\cos s \ , \qquad b = r\sin s \ .$$

よって，各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s) \ .$$

各実数 x に対して，

$$a \sin x + b \cos x = r \cos s \sin x + r \sin s \cos x = r(\sin x \cos s + \cos x \sin s) \ .$$

各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)\ .$$

正弦関数の加法定理より $\sin x\cos s + \cos x\sin s = \sin(x+s)$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

各実数 x に対して，

$$a\sin x+b\cos x = r\cos s\sin x+r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s+\cos x\sin s)\ .$$

正弦関数の加法定理より $\sin x\cos s+\cos x\sin s=\sin(x+s)$ なので，

$$a\sin x+b\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

$\mathrm{O}=(0,0)$ ，$\mathrm{P}=(a,b)$ より $r=\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$ なので，

$$a\sin x+b\cos x = r\sin(x+s) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+s)\ .$$

各実数 x に対して，

$$a\sin x + b\cos x = r\cos s\sin x + r\sin s\cos x = r(\sin x\cos s + \cos x\sin s)\ .$$

正弦関数の加法定理より $\sin x\cos s + \cos x\sin s = \sin(x+s)$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s)\ .$$

$\mathrm{O} = (0,0)$ ，$\mathrm{P} = (a,b)$ より $r = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{a^2+b^2}$ なので，

$$a\sin x + b\cos x = r\sin(x+s) = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+s)\ .$$

定理　定数 a と b とについて，$a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (a,b)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つを $s\mathrm{rad}$（ s は実数）とする．このとき，任意の実数 x について

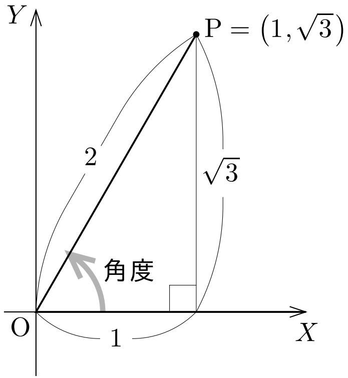
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+s)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$　次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について

$\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x + s)$.

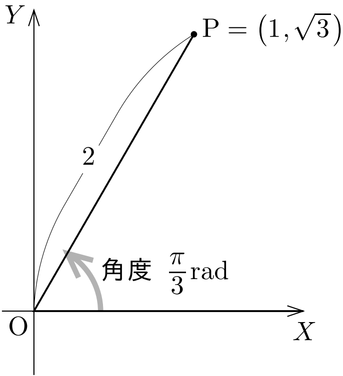
例　次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について
$\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．



例　次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について $\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$ ．

　XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．



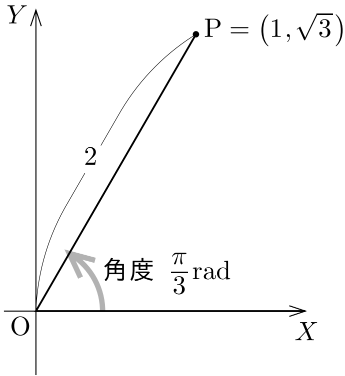
よって，任意の実数 x について

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x =$$

例　次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について $\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．よって，任意の実数 x について

$$\begin{aligned}\sin x + \sqrt{3}\cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^{\,2}}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\ .\end{aligned}$$

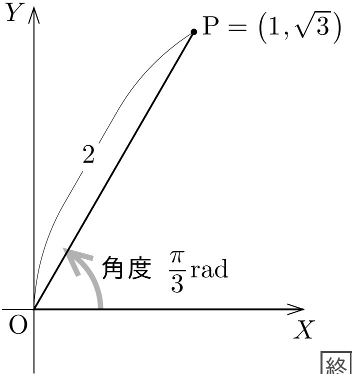


例　次のような定数 r, s の値を一組求める：任意の実数 x について $\sin x + \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$ ．

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(1, \sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $\dfrac{\pi}{3}\mathrm{rad}$ である．よって，任意の実数 x について

$$
\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^{\,2}}\,\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\
&= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \ .
\end{aligned}
$$

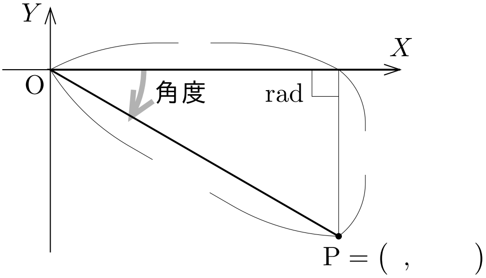
$r = 2$ かつ $s = \dfrac{\pi}{3}$ とすればよい．



終

$\boxed{\text{問}11.9.7}$ 次のような定数 r, s の値を一組求めよ： $r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$ ．

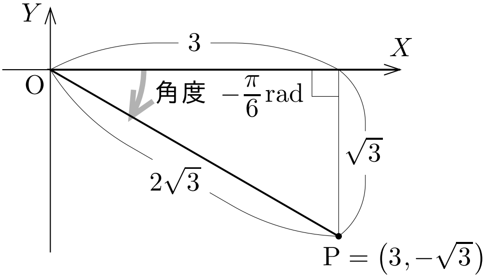
XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = (\quad,\qquad)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは　　　　　である．従って，任意の実数 x について



$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \qquad\qquad .$$

$\boxed{問11.9.7}$ 次のような定数 r, s の値を一組求めよ：$r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

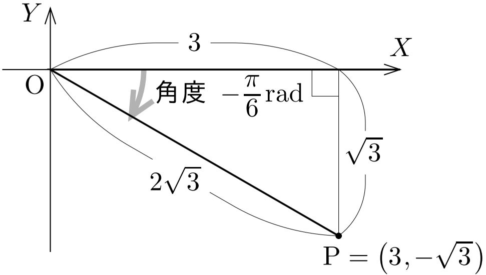
XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\dfrac{\pi}{6}\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について



$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$\boxed{\text{問}11.9.7}$ 次のような定数 r, s の値を一組求めよ：$r \geq 0$ かつ $-\pi < s \leq \pi$ かつ任意の実数 x について $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = r\sin(x+s)$.

XY 座標平面における点 $\mathrm{P} = \left(3, -\sqrt{3}\right)$ に対して，原点 $\mathrm{O} = (0,0)$ から X 軸の向きに伸びる始線 $\mathrm{O}X$ に対する線分 OP の弧度法による角度の一つは $-\frac{\pi}{6}\mathrm{rad}$ である．従って，任意の実数 x について



$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^{\,2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{12}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) .$$

$r = \sqrt{12}$ かつ $s = -\frac{\pi}{6}$ とすればよい． $\boxed{\text{終}}$