

11.5 三角関数の周期

[定義] 関数 f 及び 0 でない定数 p について,

$$f \text{ の定義域の任意の実数 } x \text{ について } f(x+p) = f(x)$$

となるとき, 定数 p を f の周期という. 関数 f の周期があるとき, f を周期関数という. 但し定数関数は普通は周期関数とは考えない. 周期関数の正の周期の中で最小のものを f の基本周期という.

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x , \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x , \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x , \quad \cdots .$$

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である.

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である. 正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である.

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である. 正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である.

任意の実数 x について,

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x, \quad \dots$$

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である. 正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である.

任意の実数 x について,

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期である.

任意の実数 x について,

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 4\pi) = \sin x, \quad \sin(x \pm 6\pi) = \sin x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は正弦関数 $\sin x$ の周期である. 正弦関数 $\sin x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって正弦関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である.

任意の実数 x について,

$$\cos(x \pm 2\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 4\pi) = \cos x, \quad \cos(x \pm 6\pi) = \cos x, \quad \dots$$

よって, $\pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \pm 8\pi, \dots$ は余弦関数 $\cos x$ の周期である. 余弦関数 $\cos x$ の正の周期は $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は 2π である. よって余弦関数 $\cos x$ の基本周期は 2π である.

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x , \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x , \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x , \quad \cdots .$$

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x, \quad \dots$$

よって, $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ は正接関数 $\tan x$ の周期である.

$\frac{\pi}{2}$ の奇数倍でない任意の実数 x について,

$$\tan(x \pm \pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 2\pi) = \tan x, \quad \tan(x \pm 3\pi) = \tan x, \quad \dots$$

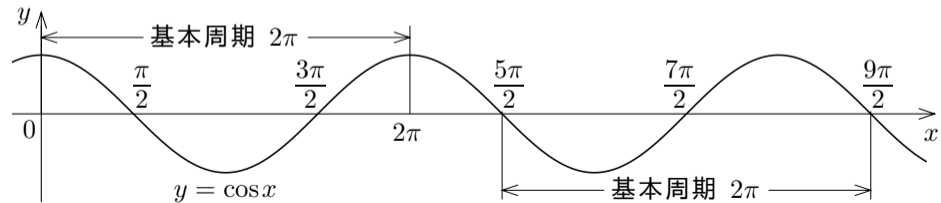
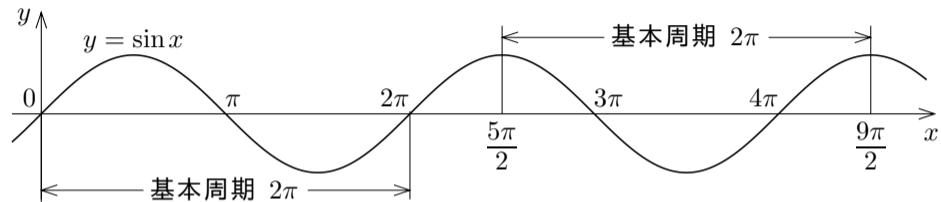
よって, $\pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \pm4\pi, \dots$ は正接関数 $\tan x$ の周期である. 正接関数 $\tan x$ の正の周期は $\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$ であり, このうち最小の周期は π である. よって正接関数 $\tan x$ の基本周期は π である.

[定理] 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり, その基本周期は 2π である. 正接関数 $\tan x$ は周期関数であり, その基本周期は π である.

[定理] 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ は周期関数であり, その基本周期は 2π である. 正接関数 $\tan x$ は周期関数であり, その基本周期は π である.

多くの場合, 単に周期というと基本周期のことを意味する. 周期関数の周期を問われたときは基本周期を答えること.

正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos x$ の基本周期 2π は、 xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフ及び $y = \cos x$ のグラフにおいて波一つ分の長さである。



例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える.

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right)$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) \end{aligned}$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x + 5) \end{aligned}$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x + 5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x + 5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

つまり $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$.

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x + 5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

つまり $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$. 故に $\frac{2\pi}{3}$ は関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ の周期である. 更にこれは基本周期になる.

例として関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ を考える. 任意の実数 x について,

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) &= \sin\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + 5\right) = \sin\left(3x + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} + 5\right) \\ &= \sin(3x + 2\pi + 5) = \sin(3x + 5) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

つまり $f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$. 故に $\frac{2\pi}{3}$ は関数 $f(x) = \sin(3x + 5)$ の周期である. 更にこれは基本周期になる.

1 次関数と三角関数との合成関数の基本周期は次のようになる.

[定理 11.5.1] 定数 a と b とは実数で $a \neq 0$ とする. 変数 x の関数 $\sin(ax + b)$ 及び関数 $\cos(ax + b)$ は周期関数であり, その基本周期は $\frac{2\pi}{|a|}$ である. また, 関数 $\tan(ax + b)$ は周期関数であり, その基本周期は $\frac{\pi}{|a|}$ である.

周期関数と1次関数との合成関数の基本周期は次のようになる.

[定理 11.5.2] 定数 A と B とは実数で $A \neq 0$ とする. 周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき, 関数 $Af(x) + B$ も周期関数でその基本周期は p である.

周期関数と1次関数との合成関数の基本周期は次のようになる。

[定理 11.5.2] 定数 A と B とは実数で $A \neq 0$ とする。周期関数 $f(x)$ の基本周期が p であるとき、関数 $Af(x) + B$ も周期関数でその基本周期は p である。

つまり、関数 $f(x)$ が周期関数であるとき、定数 B と 0 でない定数 A とに対して、関数 $Af(x) + B$ の基本周期は $f(x)$ の基本周期と同じである。

例 変数 x の関数 $\frac{7}{2} \sin \frac{9-7x}{5} + \frac{8}{3}$ の基本周期を求める.

例 変数 x の関数 $\frac{7}{2} \sin \frac{9-7x}{5} + \frac{8}{3}$ の基本周期を求める. $\sin \frac{9-7x}{5} =$

$\sin\left(-\frac{7}{5}x + \frac{9}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin \frac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\text{---}}{\text{---}} = \text{---} = \text{---} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7}{2} \sin \frac{9-7x}{5} + \frac{8}{3}$ の基本周期を求める. $\sin \frac{9-7x}{5} =$

$\sin\left(-\frac{7}{5}x + \frac{9}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin \frac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{7}{5}} = \frac{10\pi}{7} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7}{2} \sin \frac{9-7x}{5} + \frac{8}{3}$ の基本周期を求める. $\sin \frac{9-7x}{5} =$

$\sin\left(-\frac{7}{5}x + \frac{9}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin \frac{9-7x}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|-\frac{7}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{7}{5}} = \frac{10\pi}{7} .$$

x の関数 $\frac{7}{2} \sin \frac{9-7x}{5} + \frac{8}{3}$ の基本周期も $\frac{10\pi}{7}$ である.

終

問11.5.1 変数 x の関数 $7 \cos \frac{8-5x}{3} + 4$ の基本周期を求めよ.

$\cos \frac{8-5x}{3} = \cos \left(\quad x \quad \right)$ なので, x の関数 $\cos \frac{8-5x}{3}$ の基本周期は

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad .$$

x の関数 $7 \cos \frac{8-5x}{3} + 4$ の基本周期も \quad である.

問11.5.1 変数 x の関数 $7 \cos \frac{8-5x}{3} + 4$ の基本周期を求めよ.

$\cos \frac{8-5x}{3} = \cos \left(-\frac{5}{3}x + \frac{8}{3} \right)$ なので, x の関数 $\cos \frac{8-5x}{3}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left| -\frac{5}{3} \right|} = \frac{2\pi}{\frac{5}{3}} = \frac{6\pi}{5} .$$

x の関数 $7 \cos \frac{8-5x}{3} + 4$ の基本周期も $\frac{6\pi}{5}$ である.

終

例 変数 x の関数 $\frac{8}{3} \cos \frac{\pi(7x-6)}{5} - \frac{9}{4}$ の基本周期を求める.

例 変数 x の関数 $\frac{8}{3} \cos \frac{\pi(7x-6)}{5} - \frac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos \frac{\pi(7x-6)}{5} = \cos \left(\frac{7\pi}{5}x - \frac{6\pi}{5} \right)$ なので, x の関数 $\cos \frac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad .$$

例 変数 x の関数 $\frac{8}{3} \cos \frac{\pi(7x-6)}{5} - \frac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos \frac{\pi(7x-6)}{5} = \cos \left(\frac{7\pi}{5}x - \frac{6\pi}{5} \right)$ なので, x の関数 $\cos \frac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left| \frac{7\pi}{5} \right|} = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{5}} = \frac{10}{7} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{8}{3} \cos \frac{\pi(7x-6)}{5} - \frac{9}{4}$ の基本周期を求める.

$\cos \frac{\pi(7x-6)}{5} = \cos \left(\frac{7\pi}{5}x - \frac{6\pi}{5} \right)$ なので, x の関数 $\cos \frac{\pi(7x-6)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left| \frac{7\pi}{5} \right|} = \frac{2\pi}{\frac{7\pi}{5}} = \frac{10}{7} .$$

x の関数 $\frac{8}{3} \cos \frac{\pi(7x-6)}{5} - \frac{9}{4}$ の基本周期も $\frac{10}{7}$ である.

終

問11.5.2 変数 x の関数 $7 - 4 \sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期を求めよ.

$\sin \frac{\pi(6x-1)}{5} = \sin\left(x \right)$ なので, x の関数 $\sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \quad .$$

x の関数 $7 - 4 \sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期も \quad である.

問11.5.2 変数 x の関数 $7 - 4 \sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期を求めよ.

$\sin \frac{\pi(6x-1)}{5} = \sin\left(\frac{6\pi}{5}x - \frac{\pi}{5}\right)$ なので, x の関数 $\sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期は

$$\frac{2\pi}{\left|\frac{6\pi}{5}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{6\pi}{5}} = \frac{5}{3}.$$

x の関数 $7 - 4 \sin \frac{\pi(6x-1)}{5}$ の基本周期も $\frac{5}{3}$ である.

終

例 変数 x の関数 $\frac{7}{6} \tan \frac{4x-3}{5} + \frac{9}{8}$ の基本周期を求める.

例 変数 x の関数 $\frac{7}{6} \tan \frac{4x-3}{5} + \frac{9}{8}$ の基本周期を求める. $\tan \frac{4x-3}{5} =$

$\tan\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\right)$ なので, x の関数 $\tan \frac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{4} = \quad .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7}{6} \tan \frac{4x-3}{5} + \frac{9}{8}$ の基本周期を求める. $\tan \frac{4x-3}{5} =$

$\tan\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\right)$ なので, x の関数 $\tan \frac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{4}{5}\right|} = \frac{\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{4} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{7}{6} \tan \frac{4x-3}{5} + \frac{9}{8}$ の基本周期を求める. $\tan \frac{4x-3}{5} =$

$\tan\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}\right)$ なので, x の関数 $\tan \frac{4x-3}{5}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left|\frac{4}{5}\right|} = \frac{\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5\pi}{4} .$$

x の関数 $\frac{7}{6} \tan \frac{4x-3}{5} + \frac{9}{8}$ の基本周期も $\frac{5\pi}{4}$ である.

終

問11.5.3 変数 x の関数 $\frac{2}{5} \tan \frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期を求めよ.

$\tan \frac{\pi(3x+5)}{4} = \tan \left(x \right)$ なので, x の関数 $\frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期は

$$\frac{\pi(3x+5)}{4} = \frac{\pi(3x+5)}{4} + \pi$$

x の関数 $\frac{2}{5} \tan \frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期も $\frac{4}{3}$ である.

問11.5.3 変数 x の関数 $\frac{2}{5} \tan \frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期を求めよ.

$\tan \frac{\pi(3x+5)}{4} = \tan \left(\frac{3\pi}{4}x + \frac{5\pi}{4} \right)$ なので, x の関数 $\frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期は

$$\frac{\pi}{\left| \frac{3\pi}{4} \right|} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} = \frac{4}{3} .$$

x の関数 $\frac{2}{5} \tan \frac{\pi(3x+5)}{4}$ の基本周期も $\frac{4}{3}$ である.

終