10.7 対数関数との合成関数のグラフ

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

[定理 **8.8.1**]　関数 f について以下のことが成り立つ．

(1)　xy 座標平面において，$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．

(2)　xy 座標平面において，$y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

　xy 座標平面で関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．対数関数 $f(x) = \log_a x$ に対して，底の変換公式により

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x) \ .$$

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

xy 座標平面で関数のグラフを考える. 定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とする. 対数関数 $f(x)=\log_a x$ に対して, 底の変換公式により

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \dfrac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x) \ .$$

定理 **8.8.1** により,

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

xy 座標平面で関数のグラフを考える. 定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とする. 対数関数 $f(x)=\log_a x$ に対して, 底の変換公式により

$$\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = \frac{\log_a x}{-1} = -\log_a x = -f(x) \ .$$

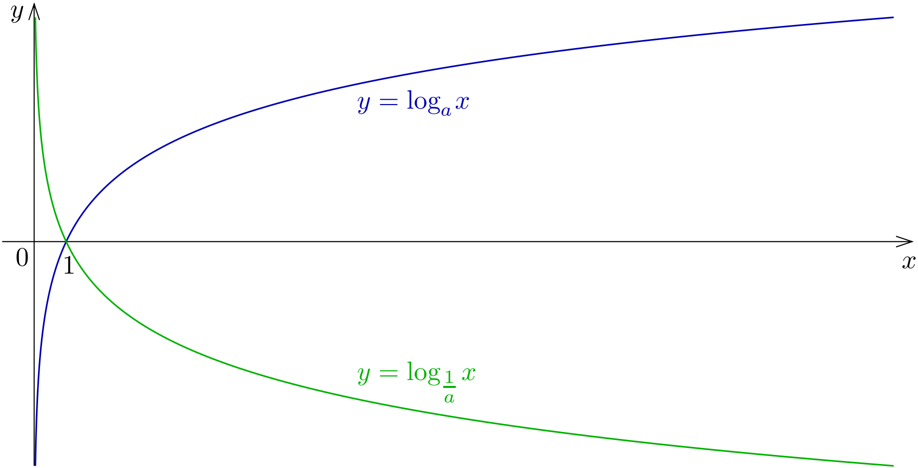
定理 **8.8.1** により,

$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

よって

$y=\log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である.

$y=\log_{\frac{1}{a}}x$ のグラフは $y=\log_a x$ のグラフと x 軸に関して対称である．例えば $a>1$ のとき次のようになる．



対数関数との合成関数のグラフを考える.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3, \infty)$ である関数 $y = \log_2(4x - 12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y=\log_2(4x-12)$ より,

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y=\log_2(4x-12)$ より,

$$2^y=2^{\log_2(4x-12)}=4x-12\ ,$$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3, \infty)$ である関数 $y = \log_2(4x - 12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y = \log_2(4x - 12)$ より,

$$2^y = 2^{\log_2(4x-12)} = 4x - 12 \ ,$$

$$4x = 2^y + 12 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y=\log_2(4x-12)$ より,

$$2^y = 2^{\log_2(4x-12)} = 4x-12 \ ,$$

$$4x = 2^y + 12 \ ,$$

$$x = \frac{2^y+12}{4} = 2^{y-2}+3 \ .$$

$\boxed{例}$　xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数　$y=\log_2(4x-12)$　のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める．

$y=\log_2(4x-12)$　より，

$$2^y=2^{\log_2(4x-12)}=4x-12\ ,$$

$$4x=2^y+12\ ,$$

$$x=\frac{2^y+12}{4}=2^{y-2}+3\ .$$

x　の値から　$y=\log_2(4x-12)$　の値を計算するより，y　の値から　$x=2^{y-2}+3$　の値を計算する方が簡単である．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3, \infty)$ である関数 $y = \log_2(4x - 12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y = \log_2(4x - 12)$ より,

$$2^y = 2^{\log_2(4x-12)} = 4x - 12 \ ,$$

$$4x = 2^y + 12 \ ,$$

$$x = \frac{2^y + 12}{4} = 2^{y-2} + 3 \ .$$

y の値に対する $x = 2^{y-2} + 3$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

y	$x = 2^{y-2} + 3$
0	$\frac{13}{4}$
1	$\frac{7}{2}$
2	4
3	5
4	7
5	11
6	19

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフを描く；またその漸近線を表す方程式を求める.

$y=\log_2(4x-12)$ より,

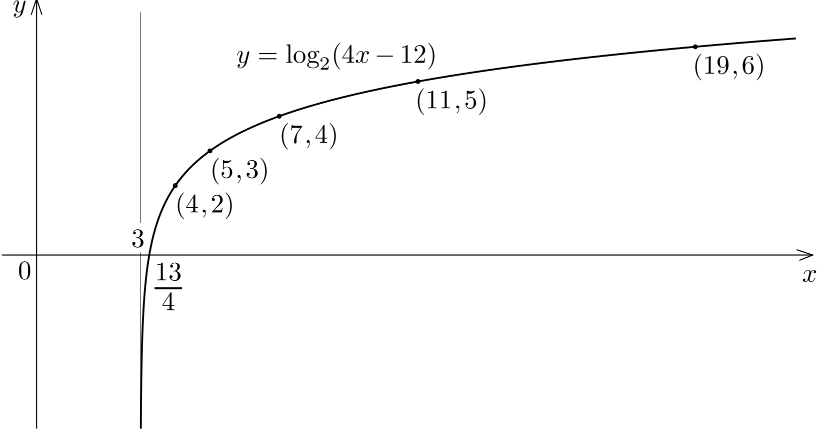
$$2^y = 2^{\log_2(4x-12)} = 4x-12 \ ,$$

$$4x = 2^y + 12 \ ,$$

$$x = \frac{2^y+12}{4} = 2^{y-2}+3 \ .$$

y の値に対する $x=2^{y-2}+3$ の値との対応を調べると右の表のようになる. 定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $2^{y-2}+3$ のグラフは次のようになる.

y	$x=2^{y-2}+3$
0	$\frac{13}{4}$
1	$\frac{7}{2}$
2	4
3	5
4	7
5	11
6	19



定義域が区間 $(3,\infty)$ である関数 $y=\log_2(4x-12)$ のグラフの漸近線は方程式 $x=3$ で表される直線である. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}10.7.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ．

$y=\log_3(9x+18)$ より，

$$3^y =$$

$$=$$

$$x =$$

y の値に対する $x=$ の値との対応は右の表のようになる．関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は， $=$ つまり $x=$ である．

y	$x=$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

問10.7.1　xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ．

$y=\log_3(9x+18)$ より，

$$3^y=3^{\log_3(9x+18)}=9x+18\ ,$$

$$9x=3^y-18\ ,$$

$$x=\frac{3^y-18}{9}=3^{y-2}-2\ .$$

y の値に対する $x=3^{y-2}-2$ の値との対応は右の表のようになる．関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は，　　　$=$　　つまり $x=$　　　である．

y	$x=3^{y-2}-2$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

$\boxed{問10.7.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ．

$y=\log_3(9x+18)$ より，

$$3^y = 3^{\log_3(9x+18)} = 9x+18 \ ,$$

$$9x = 3^y - 18 \ ,$$

$$x = \frac{3^y-18}{9} = 3^{y-2}-2 \ .$$

y の値に対する $x=3^{y-2}-2$ の値との対応は右の表のようになる．関数 $y=\log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は，　　　$=$　　つまり $x=$　　　である．

y	$x=3^{y-2}-2$
0	$-\frac{17}{9}$
1	$-\frac{5}{3}$
2	-1
3	1
4	7
5	25

$\boxed{問 10.7.1}$ xy 座標平面において定義域が区間 $(-2,\infty)$ である関数 $y = \log_3(9x+18)$ のグラフを描け；またその漸近線を表す方程式を求めよ．

$y = \log_3(9x+18)$ より，

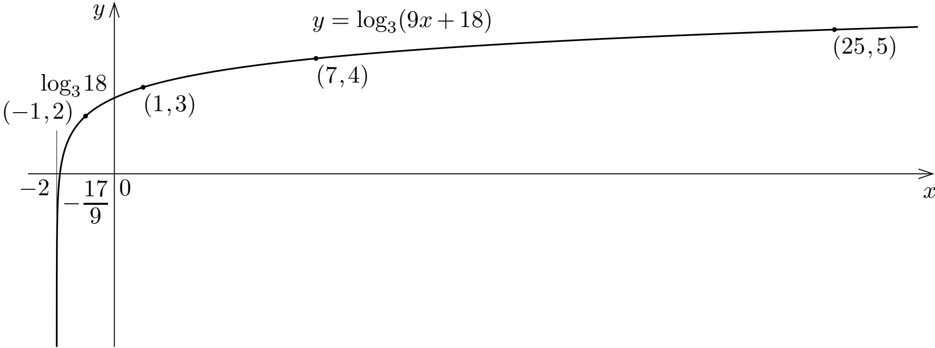
$$3^y = 3^{\log_3(9x+18)} = 9x+18\ ,$$

$$9x = 3^y - 18\ ,$$

$$x = \frac{3^y - 18}{9} = 3^{y-2} - 2\ .$$

y の値に対する $x = 3^{y-2} - 2$ の値との対応は右の表のようになる．関数 $y = \log_3(9x+18)$ のグラフは以下のようになる．漸近線を表す方程式は，$9x+18=0$ つまり $x=-2$ である．

y	$x = 3^{y-2} - 2$
0	$-\frac{17}{9}$
1	$-\frac{5}{3}$
2	-1
3	1
4	7
5	25


y
$y = \log_3(9x + 18)$
$(25, 5)$
$(7, 4)$
$\log_3 18$
$(1, 3)$
$(-1, 2)$
-2
$-\dfrac{17}{9}$
0
x

$\boxed{\text{例}}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$\boxed{例}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4=\frac{\log_3(x+9)}{\log_3\dfrac{1}{3}}+4=4-\log_3(x+9)\ .$$

例　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \frac{1}{3}} + 4 = 4 - \log_3(x+9) \ .$$

これより，$\log_3(x+9) = 4 - y = \log_3 3^{4-y}$ ，

$x+9 = 3^{4-y}$ ，$x = 3^{4-y} - 9$.

例　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4=\frac{\log_3(x+9)}{\log_3\dfrac{1}{3}}+4=4-\log_3(x+9)\ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$, $x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$. 変数 t を $t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$.

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$

例　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3\frac{1}{3}}+4 = 4-\log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$, $x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$. 変数 t を $t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$.

$-\frac{80}{9} \leq x \leq 18$ より, $-\frac{80}{9} \leq 3^t-9 \leq 18$,

$\frac{1}{9} \leq 3^t \leq 27$, $\log_3\frac{1}{9} \leq \log_3 3^t \leq \log_3 27$,

$-2 \leq t \leq 3$.

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$

例　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4 = \frac{\log_3(x+9)}{\log_3 \frac{1}{3}} + 4 = 4-\log_3(x+9) \ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$, $x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$. 変数 t を $t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$. $-\dfrac{80}{9} \leq x \leq 18$ より, $-\dfrac{80}{9} \leq 3^t-9 \leq 18$, $\dfrac{1}{9} \leq 3^t \leq 27$, $\log_3 \dfrac{1}{9} \leq \log_3 3^t \leq \log_3 27$, $-2 \leq t \leq 3$. この範囲で, t の値に対する $x=3^t-9$ の値と $y=4-t$ の値との対応を調べる

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		

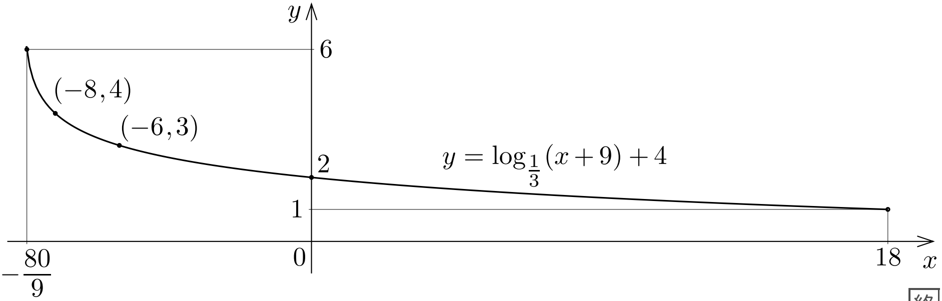
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[-\frac{80}{9},18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4$ のグラフを描く.

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+4=\frac{\log_3(x+9)}{\log_3\frac{1}{3}}+4=4-\log_3(x+9)\ .$$

これより, $\log_3(x+9)=4-y=\log_3 3^{4-y}$, $x+9=3^{4-y}$, $x=3^{4-y}-9$. 変数 t を $t=4-y$ とおく. $y=4-t$. $x=3^t-9$. $-\frac{80}{9}\leq x\leq 18$ より, $-\frac{80}{9}\leq 3^t-9\leq 18$, $\frac{1}{9}\leq 3^t\leq 27$, $\log_3\frac{1}{9}\leq\log_3 3^t\leq\log_3 27$, $-2\leq t\leq 3$. この範囲で, t の値に対する $x=3^t-9$ の値と $y=4-t$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x=3^t-9$	$y=4-t$
-2	$\frac{1}{9}-9=-\frac{80}{9}$	6
-1	$\frac{1}{3}-9-\frac{26}{3}$	5
0	$1-9=-8$	4
1	$3-9=-6$	3
2	$9-9=0$	2
3	$27-9=18$	1

定義域区間 $\left[-\dfrac{80}{9}, 18\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+9)+2$ のグラフは次のようになる.



終

$\boxed{問10.7.2}$　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(\qquad)}{\log_2\quad}+1 = \qquad\qquad .$$

これより，$\log_2(x-4) = \qquad = \log_2 \qquad$，$x-4 = \qquad$，$x = \qquad$．変数 t を $t = \qquad$ とおく．$y = \qquad$．$x = \qquad$．

$\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より，$\frac{33}{8} \leq \qquad \leq 20$，

$\quad \leq 2^t \leq \quad$，$\log_2 \quad \leq \log_2 2^t \leq \log_2 \quad$，

$\quad \leq t \leq \quad$．この範囲で，t の値に対する $x = \qquad$ の値と $y = \qquad$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x =$	$y =$

問 10.7.2　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = \qquad = \log_2 \qquad$,

$x-4 = \qquad$, $x = \qquad$. 変数 t を

$t = \qquad$ とおく. $y = \qquad$. $x = \qquad$.

$\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\frac{33}{8} \leq \qquad \leq 20$,

$\quad \leq 2^t \leq \quad$, $\log_2 \quad \leq \log_2 2^t \leq \log_2 \quad$,

$\quad \leq t \leq \quad$. この範囲で, t の値に対する

$x = \qquad$ の値と $y = \qquad$ の値との対応

を調べると右の表のようになる.

t	$x =$	$y =$

問10.7.2　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4)\ .$$

これより, $\log_2(x-4)=1-y=\log_2 2^{1-y}$, $x-4=2^{1-y}$, $x=2^{1-y}+4$. 変数 t を $t=$ 　　 とおく. $y=$ 　　 . $x=$ 　　 . $\dfrac{33}{8}\leq x\leq 20$ より, $\dfrac{33}{8}\leq$ 　　 ≤ 20 ,

$\leq 2^t \leq$ 　 , $\log_2$ 　 $\leq \log_2 2^t \leq \log_2$ 　 ,

$\leq t \leq$ 　 . この範囲で, t の値に対する $x=$ 　　 の値と $y=$ 　　 の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x=$	$y=$

$\boxed{問 10.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\dfrac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \dfrac{1}{2}} + 1 = 1 - \log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = 1-y = \log_2 2^{1-y}$,
$x-4 = 2^{1-y}$, $x = 2^{1-y}+4$. 変数 t を
$t = 1-y$ とおく. $y = 1-t$. $x = 2^t+4$.
$\dfrac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\dfrac{33}{8} \leq \qquad\qquad \leq 20$,

$\qquad \leq 2^t \leq \qquad$, $\log_2 \qquad \leq \log_2 2^t \leq \log_2 \qquad$,

$\qquad \leq t \leq \qquad$. この範囲で, t の値に対する
$x = \qquad\qquad$ の値と $y = \qquad\qquad$ の値との対応
を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t+4$	$y = 1-t$

$\boxed{\text{問}10.7.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}} + 1 = 1 - \log_2(x-4) \ .$$

これより, $\log_2(x-4) = 1-y = \log_2 2^{1-y}$, $x-4 = 2^{1-y}$, $x = 2^{1-y}+4$. 変数 t を $t = 1-y$ とおく. $y = 1-t$. $x = 2^t+4$. $\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\frac{33}{8} \leq 2^t+4 \leq 20$, $\frac{1}{8} \leq 2^t \leq 16$, $\log_2 \frac{1}{8} \leq \log_2 2^t \leq \log_2 16$, $-3 \leq t \leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x =$ 　　　の値と $y =$ 　　　の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x = 2^t+4$	$y = 1-t$
-3		
-2		
-1		
0		
1		
2		
3		
4		

問10.7.2　xy 座標平面において定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフを描け.

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1 = \frac{\log_2(x-4)}{\log_2 \frac{1}{2}}+1 = 1-\log_2(x-4)\ .$$

これより, $\log_2(x-4)=1-y=\log_2 2^{1-y}$, $x-4=2^{1-y}$, $x=2^{1-y}+4$. 変数 t を $t=1-y$ とおく. $y=1-t$. $x=2^t+4$. $\frac{33}{8} \leq x \leq 20$ より, $\frac{33}{8} \leq 2^t+4 \leq 20$, $\frac{1}{8} \leq 2^t \leq 16$, $\log_2 \frac{1}{8} \leq \log_2 2^t \leq \log_2 16$, $-3 \leq t \leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x=2^t+4$ の値と $y=1-t$ の値との対応を調べると右の表のようになる.

t	$x=2^t+4$	$y=1-t$
-3	$\frac{1}{8}+4=\frac{33}{8}$	4
-2	$\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}$	3
-1	$\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$	2
0	$1+4=5$	1
1	$2+4=6$	0
2	$4+4=8$	-1
3	$8+4=12$	-2
4	$16+4=20$	-3

定義域が区間 $\left[\frac{33}{8}, 20\right]$ である関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-4)+1$ のグラフは次のようになる.