10.6 指数関数との合成関数のグラフ

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

[定理 **8.8.1**]　関数 f について以下のことが成り立つ．

(1)　xy 座標平面において，$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である．

(2)　xy 座標平面において，$y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である．

xy 座標平面で関数のグラフを考える．定数 a は実数で $a>0$ ，$a\neq 1$ とする．指数関数 $f(x)=a^x$ に対して，

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x) \ .$$

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y = -f(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

xy 座標平面で関数のグラフを考える. 定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 指数関数 $f(x) = a^x$ に対して,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x) \ .$$

定理 **8.8.1** により,

$y = f(-x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

[定理 **8.8.1**] 関数 f について以下のことが成り立つ.

(1) xy 座標平面において, $y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

(2) xy 座標平面において, $y=-f(x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

xy 座標平面で関数のグラフを考える. 定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とする. 指数関数 $f(x)=a^x$ に対して,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = f(-x)\ .$$

定理 **8.8.1** により,

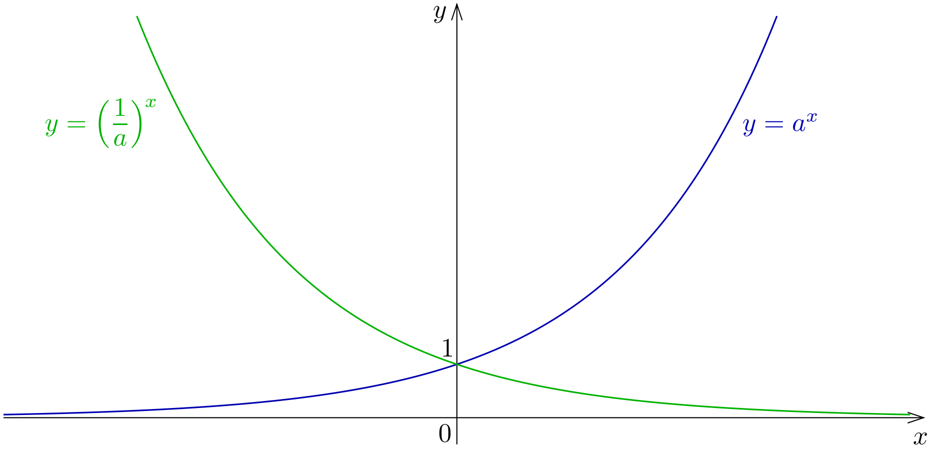
$y=f(-x)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフと y 軸に関して対称である.

よって

$y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと y 軸に関して対称である.

$y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $y=a^x$ のグラフと y 軸に関して対称である.

例えば $a>1$ のとき次のようになる.



指数関数との合成関数のグラフを考える.

例 xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を描く.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を描く．変数 t を $t=\dfrac{1}{4}x-2$ とおく． $x=4(t+2)=4t+8$ ．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y = 3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を描く．変数 t を $t = \dfrac{1}{4}x - 2$ とおく． $x = 4(t+2) = 4t+8$ ． t の値に対する $x = 4t+8$ の値と $y = 3^{\frac{1}{4}x-2} = 3^t$ の値との対応を調べる．

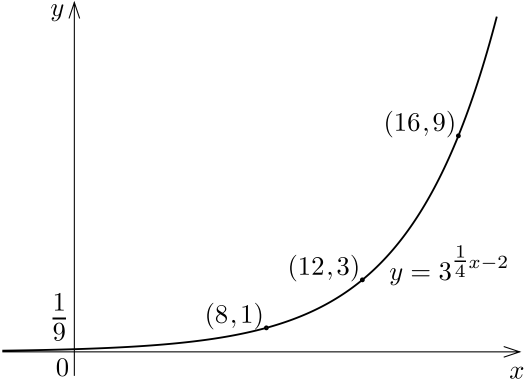
例 xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を描く．変数 t を $t=\frac{1}{4}x-2$ とおく． $x=4(t+2)=4t+8$ ． t の値に対する $x=4t+8$ の値と $y=3^{\frac{1}{4}x-2}=3^t$ の値との対応を調べる．

t	$x=4t+8$	$y=3^t$
-2	0	$\frac{1}{9}$
-1	4	$\frac{1}{3}$
0	8	1
1	12	3
2	16	9

例 xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフの概形を描く．変数 t を $t=\frac{1}{4}x-2$ とおく． $x=4(t+2)=4t+8$ ． t の値に対する $x=4t+8$ の値と $y=3^{\frac{1}{4}x-2}=3^t$ の値との対応を調べる．

t	$x=4t+8$	$y=3^t$
-2	0	$\frac{1}{9}$
-1	4	$\frac{1}{3}$
0	8	1
1	12	3
2	16	9

関数 $y=3^{\frac{1}{4}x-2}$ のグラフは右図のようになる．



終

問10.6.1 xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描け.

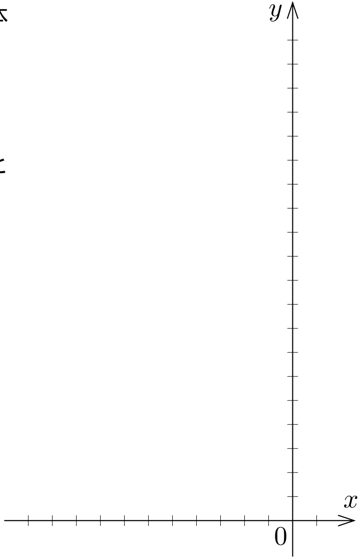
変数 t を $t =$ とおく. $x = t$,

$x =$. t の値に対する $x =$ の値と

$y = 2^{\frac{2}{3}x+4} =$ の値との対応を調べる.

t	$x =$	$y =$
-2		
0		
2		
4		

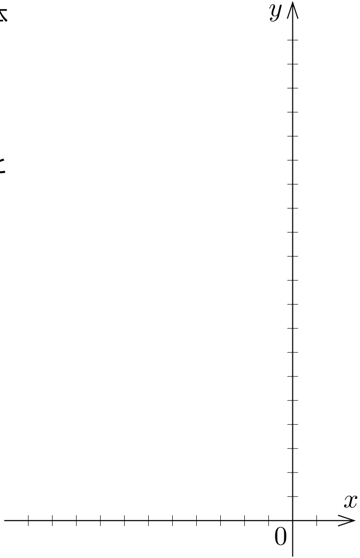
関数 $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフは右図のようになる.



$\boxed{\text{問}10.6.1}$ xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描け.

変数 t を $t = \dfrac{2}{3}x + 4$ とおく. $\dfrac{2}{3}x = t - 4$, $x = \dfrac{3}{2}t - 6$. t の値に対する $x = \dfrac{3}{2}t - 6$ の値と $y = 2^{\frac{2}{3}x+4} = 2^t$ の値との対応を調べる.

t	$x = \dfrac{3}{2}t - 6$	$y = 2^t$
-2		
0		
2		
4		

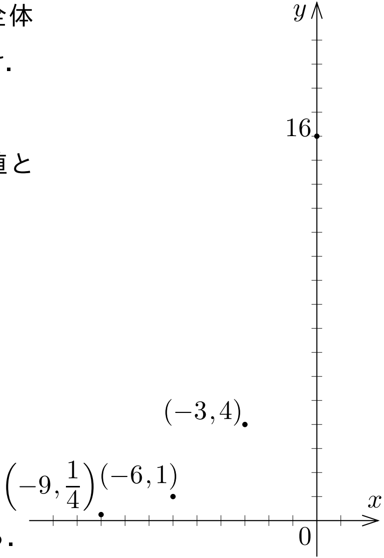


関数 $y = 2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフは右図のようになる.

問10.6.1 xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描け.

変数 t を $t=\frac{2}{3}x+4$ とおく. $\frac{2}{3}x=t-4$, $x=\frac{3}{2}t-6$. t の値に対する $x=\frac{3}{2}t-6$ の値と $y=2^{\frac{2}{3}x+4}=2^t$ の値との対応を調べる.

t	$x=\frac{3}{2}t-6$	$y=2^t$
-2	-9	$\frac{1}{4}$
0	-6	1
2	-3	4
4	0	16



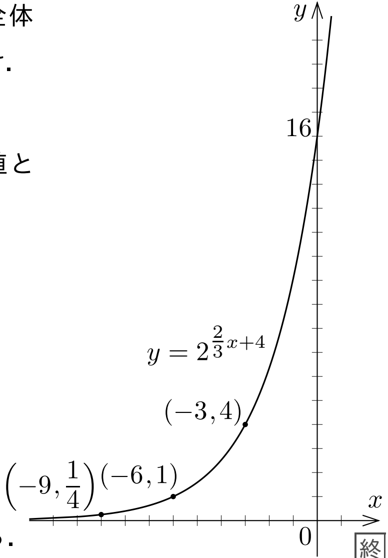
関数 $y=2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフは右図のようになる.

$\boxed{\text{問}10.6.1}$ xy 座標平面において定義域が実数全体である関数 $y=2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフの概形を描け.

変数 t を $t=\dfrac{2}{3}x+4$ とおく. $\dfrac{2}{3}x=t-4$, $x=\dfrac{3}{2}t-6$. t の値に対する $x=\dfrac{3}{2}t-6$ の値と $y=2^{\frac{2}{3}x+4}=2^t$ の値との対応を調べる.

t	$x=\dfrac{3}{2}t-6$	$y=2^t$
-2	-9	$\dfrac{1}{4}$
0	-6	1
2	-3	4
4	0	16

関数 $y=2^{\frac{2}{3}x+4}$ のグラフは右図のようになる.



$\boxed{\text{終}}$

例 xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9\ .$$

関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ において $y=0$ とすると, $2^{-x-1}-9=0$ なので,
$2^{-x-1}=9$, $-x-1=\log_2 9$, $x=-1-\log_2 9$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-5, 2]$ である関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$ のグラフの概形を描く.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 9 = \frac{1}{2^{x+1}} - 9 = 2^{-x-1} - 9 \ .$$

関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} - 9$ において $y = 0$ とすると, $2^{-x-1} - 9 = 0$ なので, $2^{-x-1} = 9$, $-x - 1 = \log_2 9$, $x = -1 - \log_2 9$. グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1 - \log_2 9$ である.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9\ .$$

関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ において $y=0$ とすると, $2^{-x-1}-9=0$ なので, $2^{-x-1}=9$, $-x-1=\log_2 9$, $x=-1-\log_2 9$. グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1-\log_2 9$ である. 変数 t を $t=-x-1$ とおく.

例 xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9 \ .$$

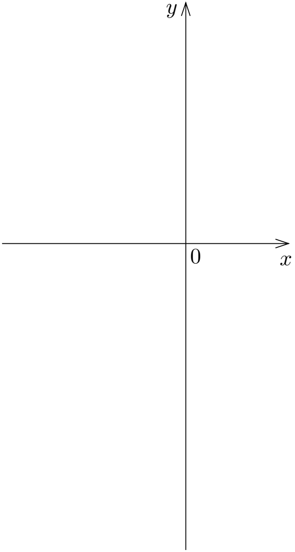
関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ において $y=0$ とすると, $2^{-x-1}-9=0$ なので, $2^{-x-1}=9$, $-x-1=\log_2 9$, $x=-1-\log_2 9$. グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1-\log_2 9$ である. 変数 t を $t=-x-1$ とおく. $x=-t-1$.
$-5 \leq x \leq 2$ より, $-5 \leq -t-1 \leq 2$, $-4 \leq -t \leq 3$, $-3 \leq t \leq 4$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフの概形を描く.

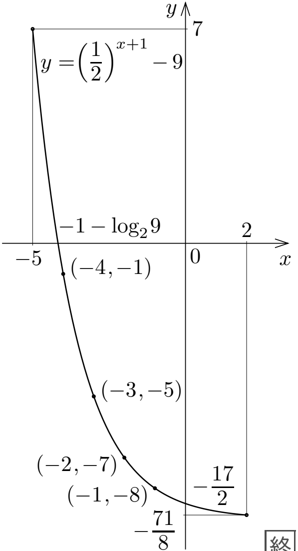
$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-9=\frac{1}{2^{x+1}}-9=2^{-x-1}-9\ .$$

関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ において $y=0$ とすると, $2^{-x-1}-9=0$ なので, $2^{-x-1}=9$, $-x-1=\log_2 9$, $x=-1-\log_2 9$. グラフと x 軸との共有点の x 座標は $-1-\log_2 9$ である. 変数 t を $t=-x-1$ とおく. $x=-t-1$. $-5\leq x\leq 2$ より, $-5\leq -t-1\leq 2$, $-4\leq -t\leq 3$, $-3\leq t\leq 4$. この範囲で, t の値に対する $x=-t-1$ の値と $y=2^{-x-1}-9=2^t-9$ の値との対応を調べる.

t	$x = -t - 1$	$y = 2^t - 9$
-3	2	$\frac{1}{8} - 9 = -\frac{71}{8}$
-2	1	$\frac{1}{4} - 9 = -\frac{35}{4}$
-1	0	$\frac{1}{2} - 9 = -\frac{17}{2}$
0	-1	$1 - 9 = -8$
1	-2	$2 - 9 = -7$
2	-3	$4 - 9 = -5$
3	-4	$8 - 9 = -1$
4	-5	$16 - 9 = 7$



t	$x=-t-1$	$y=2^t-9$
-3	2	$\dfrac{1}{8}-9=-\dfrac{71}{8}$
-2	1	$\dfrac{1}{4}-9=-\dfrac{35}{4}$
-1	0	$\dfrac{1}{2}-9=-\dfrac{17}{2}$
0	-1	$1-9=-8$
1	-2	$2-9=-7$
2	-3	$4-9=-5$
3	-4	$8-9=-1$
4	-5	$16-9=7$



定義域が区間 $[-5,2]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1}-9$ のグラフは右上図のようになる.

終

$\boxed{問10.6.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-1, 4]$ である関数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7$ のグラフの概形を描け.

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7 = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$y = 0$ とすると, $\qquad - 7 = 0$, $\qquad = \quad$, $\qquad = \qquad$, $x = \qquad$.
変数 t を $t = \qquad$ とおく. $x = \qquad$. $-1 \leq x \leq 4$ より, $-1 \leq \qquad \leq 4$,
$\quad \leq -t \leq \quad$, $\quad \leq t \leq \quad$. t の値に対する $x = \qquad$ の値と
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 7 = \qquad$ の値との対応を調べる.

$\boxed{\text{問}10.6.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-1,4]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7$ のグラフの概形を描け.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-7=(2^{-1})^{x-3}-7=2^{3-x}-7\ .$$

$y=0$ とすると, $2^{3-x}-7=0$, $2^{3-x}=\quad$, $3-x=\qquad$, $x=\qquad$.
変数 t を $t=\qquad$ とおく. $x=\qquad$. $-1\leq x\leq 4$ より, $-1\leq\qquad\leq 4$, $\quad\leq -t\leq\quad$, $\quad\leq t\leq\quad$. t の値に対する $x=\qquad$ の値と $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7=\qquad$ の値との対応を調べる.

$\boxed{\text{問}10.6.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-1,4]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7$ のグラフの概形を描け.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-7=(2^{-1})^{x-3}-7=2^{3-x}-7\ .$$

$y=0$ とすると, $2^{3-x}-7=0$, $2^{3-x}=7$, $3-x=\log_2 7$, $x=3-\log_2 7$.

変数 t を $t=$ とおく. $x=$. $-1\leq x\leq 4$ より, $-1\leq \quad \leq 4$, $\leq -t\leq$, $\leq t\leq$. t の値に対する $x=$ の値と $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7=$ の値との対応を調べる.

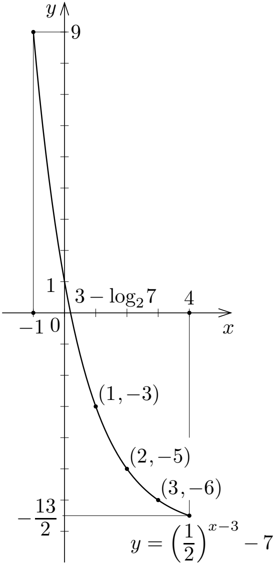
$\boxed{問 10.6.2}$ xy 座標平面において定義域が区間 $[-1,4]$ である関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7$ のグラフの概形を描け.

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-7=(2^{-1})^{x-3}-7=2^{3-x}-7\ .$$

$y=0$ とすると, $2^{3-x}-7=0$, $2^{3-x}=7$, $3-x=\log_2 7$, $x=3-\log_2 7$.
変数 t を $t=3-x$ とおく. $x=3-t$. $-1\leq x\leq 4$ より, $-1\leq 3-t\leq 4$, $-4\leq -t\leq 1$, $-1\leq t\leq 4$. t の値に対する $x=3-t$ の値と $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7=2^t-7$ の値との対応を調べる.

t	$x=3-t$	$y=2^t-7$
-1	4	$\dfrac{1}{2}-7=-\dfrac{13}{2}$
0	3	$1-7=-6$
1	2	$2-7=-5$
2	1	$4-7=-3$
3	0	$8-7=1$
4	-1	$16-9=9$

関数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}-7$ のグラフは右図のようになる.



終