10.5 指数・対数に関する不等式

定数 a について，

- $a > 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調増加であり，
- $0 < a < 1$ のとき指数関数 a^x も対数関数 $\log_a x$ も単調減少である．

実数 a について $a>1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．

実数 a について $a>1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r<\log_a s \ .$$

実数 a について $a > 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

　実数 a について $a>1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r<\log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r<\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r}=\quad$，$a^{\log_a s}=\quad$ なので，

　実数 a について $a>1$ とする．実数 r, s とについて $r, s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r < \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ， $a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r < \log_a s \text{ ならば } r < s \ .$$

　実数 a について $a>1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調増加なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r<\log_a s\ .$$

また，指数関数 a^x は単調増加なので，

$$\log_a r<\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s}\ ;$$

$a^{\log_a r}=r$ ，$a^{\log_a s}=s$ なので，

$$\log_a r<\log_a s \text{ ならば } r<s\ .$$

こうして次のことが導かれた：

$$r<s \iff \log_a r<\log_a s\ .$$

実数 a について $0 < a < 1$ とする．実数 r, s とについて $r, s > 0$ とする．

実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r>\log_a s \ .$$

　実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r, s とについて $r, s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r>\log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r>\log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r}<a^{\log_a s} \ ;$$

実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r < s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = \quad$ ，$a^{\log_a s} = \quad$ なので，

　実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ，$a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } r<s \ .$$

　実数 a について $0<a<1$ とする．実数 r,s とについて $r,s>0$ とする．対数関数 $\log_a x$ は単調減少なので，

$$r<s \text{ ならば } \log_a r > \log_a s \ .$$

また，指数関数 a^x は単調減少なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } a^{\log_a r} < a^{\log_a s} \ ;$$

$a^{\log_a r} = r$ ，$a^{\log_a s} = s$ なので，

$$\log_a r > \log_a s \text{ ならば } r < s \ .$$

こうして次のことが導かれた：

$$r<s \iff \log_a r > \log_a s \ .$$

このようにして次の定理が導かれる．

[定理 10.5]　実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．

(1)　$a>1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r < \log_a s \ ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \leq \log_a s \ ;$$

(2)　$0<a<1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$r<s \iff \log_a r > \log_a s \ ,$$

$$r \leq s \iff \log_a r \geq \log_a s \ .$$

変数が現れる式を指数とする冪の式を含む方程式を考える．このような方程式に現れる変数は実数を表すものとする．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く. 各実数 x について $\log_3 3^{x-5} =$ 　　　　なので,

例　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く. 各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので,

$\log_a a^p = p$

例　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く．各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x - 5$ なので，底が 3 である対数を考える．

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く．各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので，底が 3 である対数を考える． $3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7$$

$a > 1$ かつ $r > 0$ かつ $s > 0$ のとき， $r < s \iff \log_a r < \log_a s$ ．

例　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く．各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので，底が 3 である対数を考える． $3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x-5 < \log_3 7$$

$\boxed{例}$　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く．各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので，底が 3 である対数を考える． $3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x-5 < \log_3 7$$

$$\iff x < 5 + \log_3 7 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $3^{x-5} < 7$ を解く．各実数 x について $\log_3 3^{x-5} = x-5$ なので，底が 3 である対数を考える． $3^{x-5} > 0$ なので，

$$3^{x-5} < 7 \iff \log_3 3^{x-5} < \log_3 7 \iff x-5 < \log_3 7$$
$$\iff x < 5 + \log_3 7 \ .$$

与えられた不等式 $3^{x-5} < 7$ を解くと $x < 5 + \log_3 7$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く.

例　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く. 各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} =$ 　　　　なので,

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える．

$\log_a a^p = p$

$\boxed{例}$　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える． $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$a > 1$ かつ $r > 0$ かつ $s > 0$ のとき， $r < s \iff \log_a r < \log_a s$ ．

例　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える． $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$\boxed{例}$　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える． $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える． $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

更に

$$\frac{5+\log_7 63}{2} = \frac{5+\log_7 (7 \cdot 3^2)}{2} = \frac{5+1+2\log_7 3}{2} = 3 + \log_7 3 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ を解く．各実数 x について $\log_7 7^{2x-5} = 2x-5$ なので，底が 7 である対数を考える． $7^{2x-5} > 0$ なので，与えられた不等式 $7^{2x-5} \leq 63$ より，

$$\log_7 7^{2x-5} \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x-5 \leq \log_7 63 \ ,$$

$$2x \leq 5 + \log_7 63 \ ,$$

$$x \leq \frac{5+\log_7 63}{2} \ .$$

更に

$$\frac{5+\log_7 63}{2} = \frac{5+\log_7(7\cdot 3^2)}{2} = \frac{5+1+2\log_7 3}{2} = 3+\log_7 3 \ .$$

故に与えられた不等式を解くと $x \leq 3+\log_7 3$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}10.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので，与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より，

$\boxed{問10.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので，与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より，

$$\log_5 5^{2x-4} < \log_5 45 \ ,$$

$$2x - 4 < \log_5 45 \ ,$$

$$2x < 4 + \log_5 45 \ ,$$

$$x < \frac{4 + \log_5 45}{2} \ .$$

$\boxed{問 10.5.1}$ 変数 x に関する不等式 $5^{2x-4} < 45$ を解け.

$0 < 5^{2x-4}$ なので，与えられた不等式 $5^{2x-4} < 45$ より，

$$\log_5 5^{2x-4} < \log_5 45 \ ,$$

$$2x - 4 < \log_5 45 \ ,$$

$$2x < 4 + \log_5 45 \ ,$$

$$x < \frac{4 + \log_5 45}{2} \ .$$

更に

$$\frac{4 + \log_5 45}{2} = \frac{4 + \log_5 (3^2 \cdot 5)}{2} = \frac{4 + 2\log_5 3 + \log_5 5}{2} = \frac{5 + 2\log_5 3}{2}$$

$$= \frac{5}{2} + \log_5 3 \ .$$

故に与えられた不等式を解くと $x < \dfrac{5}{2} + \log_5 3$. $\boxed{終}$

　変数が現れる式を真数とする対数の式を含む不等式を考える．このような不等式に現れる変数は実数を表すものとする．

　変数が現れる式を真数とする対数の式を含む不等式を考える．このような不等式に現れる変数は実数を表すものとする．

　前述の定理を用いる．

[定理 **10.5**]　実数 a について $a>0$ ，$a\neq 1$ とする．

(1)　$a>1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$\log_a r < \log_a s \iff r < s \ ,$$

$$\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s \ ;$$

(2)　$0<a<1$ のとき，正の任意の実数 r と s とについて，

$$\log_a r > \log_a s \iff r < s \ ,$$

$$\log_a r \geq \log_a s \iff r \leq s \ .$$

不等式の中に変数 x を含む式 $f(x)$ を真数とする対数の式 $\log_a f(x)$ が現れるとき，次のことに注意せよ：

$$\text{対数の式 } \log_a f(x) \text{ の真数 } f(x) \text{ は正である；}$$

従って，その不等式が成り立つためには $f(x) > 0$ でなければならない．このことを真数条件という.

例　変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 \quad =\log_3 \quad$ なので，

右辺も底が 3 である一つの対数の式にする．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$p=\log_a a^p$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3(5x-6)<2 \iff \log_3(5x-6)<\log_3 9$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9\end{aligned}$$

$a>1$ ，$r>0$ ，$s>0$ ならば，$\log_a r<\log_a s \iff r<s$

例　変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9 \iff 5x<15\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 &\iff \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ &\iff 5x-6<9 \iff 5x<15\\ &\iff x<3\ .\end{aligned}$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解く．対数の式 $\log_3(5x-6)$ の真数は正なので $5x-6>0$ ，よって $x>\dfrac{6}{5}$ ．与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ について，右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\begin{aligned}\log_3(5x-6)<2 \iff& \log_3(5x-6)<\log_3 9\\ \iff& 5x-6<9 \iff 5x<15\\ \iff& x<3\ .\end{aligned}$$

故に，与えられた不等式 $\log_3(5x-6)<2$ を解くと， $x>\dfrac{6}{5}$ かつ $x<3$ ，つまり $\dfrac{6}{5}<x<3$ ． 終

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$3x+7 > 0$ ，

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x > -\dfrac{7}{3}$ ．

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\dfrac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 \quad = \log_5 \quad$ なので，

右辺も底が 5 である一つの対数の式にする．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\dfrac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$p=\log_a a^p$$

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x > -\dfrac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ について，右辺は $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7) > \log_5 25 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\dfrac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7)>\log_5 25\ ,$$

$$3x+7>25\ ,$$

$a>1$ ， $r>0$ ， $s>0$ ならば， $\log_a r>\log_a s \iff r>s$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x > -\dfrac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7) > 2$ について，右辺は $2 = \log_5 5^2 = \log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7) > \log_5 25 \ ,$$

$$3x+7 > 25 \ ,$$

$$3x > 18 \ ,$$

$$x > 6 \ .$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_5(3x+7)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $3x+7>0$ ，よって $x>-\frac{7}{3}$ ．与えられた不等式 $\log_5(3x+7)>2$ について，右辺は $2=\log_5 5^2=\log_5 25$ なので，

$$\log_5(3x+7)>\log_5 25\ ,$$

$$3x+7>25\ ,$$

$$3x>18\ ,$$

$$x>6\ .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $x>-\frac{7}{3}$ かつ $x>6$ ，つまり $x>6$ ．終

$\boxed{問 10.5.2}$ 変数 k に関する不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $k \qquad$. 与えられた不等式 $3 - \log_2(5k-2) \geq 0$ より,

$$\log_2(5k-2) \quad 3 = \log_2 \quad = \log_2 \quad ,$$

$\boxed{\text{問}10.5.2}$ 変数 k に関する不等式 $3-\log_2(5k-2)\geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $5k-2>0$, よって $k>\dfrac{2}{5}$. 与えられた不等式 $3-\log_2(5k-2)\geq 0$ より,

$$\log_2(5k-2)\leq 3=\log_2 2^3=\log_2 8\ ,$$

$$5k-2\leq 8$$

$$k\leq 2\ .$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $k>\dfrac{2}{5}$ かつ $k\leq 2$, つまり $\dfrac{2}{5}<k\leq 2$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2a-5>0$ ，

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leqq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leqq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leqq \frac{1}{2} .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 \quad =\log_9 \qquad =\log_9$ なので，

右辺も底が 9 である一つの対数の式にする．

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$ ，よって $a > \dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$ なので，

$p = \log_a a^p$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので，

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2}\ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9(3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$ なので，

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3\ ,$$

$$2a-5 \leq 3\ ,$$

$a>1$ ，$r>0$ ，$s>0$ ならば，$\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s$

例 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1\leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1\leq 0$ より

$$\log_9(2a-5)\leq\frac{1}{2}\ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2}=\log_9 9^{\frac{1}{2}}=\log_9(3^2)^{\frac{1}{2}}=\log_9 3$ なので，

$$\log_9(2a-5)\leq\log_9 3\ ,$$

$$2a-5\leq 3\ ,$$

$$2a\leq 8\ ,$$

$$a\leq 4\ .$$

$\boxed{例}$ 変数 a に関する不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2a-5>0$ ，よって $a>\dfrac{5}{2}$ ．与えられた不等式 $2\log_9(2a-5)-1 \leq 0$ より

$$\log_9(2a-5) \leq \frac{1}{2} \ .$$

この不等式の右辺は $\dfrac{1}{2} = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \log_9 (3^2)^{\frac{1}{2}} = \log_9 3$ なので，

$$\log_9(2a-5) \leq \log_9 3 \ ,$$

$$2a-5 \leq 3 \ ,$$

$$2a \leq 8 \ ,$$

$$a \leq 4 \ .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $a>\dfrac{5}{2}$ かつ $a \leq 4$ ，つまり $\dfrac{5}{2}<a \leq 4$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問 10.5.3}$ 変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $x \qquad$. 与えられた不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ より,

$$\log_8(5x-11) \geq \quad = \log_8 \quad = \log_8 \qquad = \log_8 \quad = \log_8 \quad ,$$

$\boxed{\text{問}10.5.3}$ 変数 x に関する不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $5x-11>0$ ，よって $x>\dfrac{11}{5}$. 与えられた不等式 $3\log_8(5x-11) \geq 2$ より,

$$\log_8(5x-11) \geq \frac{2}{3} = \log_8 8^{\frac{2}{3}} = \log_8(2^3)^{\frac{2}{3}} = \log_8 2^2 = \log_8 4 \ ,$$

$$5x-11 \geq 4 \ .$$

$$5x \geq 15 \ .$$

$$x \geq 3 \ .$$

故に，与えられた不等式を解くと, $x>\dfrac{11}{5}$ かつ $x \geq 3$ ，つまり $x \geq 3$. $\boxed{\text{終}}$

実数 a について $0 < a < 1$ のとき，任意の正の実数 r と s とについて，

$$\log_a r < \log_a s \iff r > s \ ,$$

$$\log_a r \leq \log_a s \iff r \geq s \ .$$

対数の式の底 a が 1 より小さいときは，両辺から対数記号 $\log_a$ を外すと不等号の向きが逆になる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2y-1>0$ ，

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2y-1>0$ ，よって $y>\dfrac{1}{2}$ ．

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2y-1>0$ ，よって $y>\dfrac{1}{2}$ ．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)\geq 2$ について，右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\qquad=\log_{\frac{1}{2}}\qquad$ なので，

右辺も底が $\dfrac{1}{2}$ である一つの対数の式にする．

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2y-1>0$，よって $y > \dfrac{1}{2}$．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について，右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので，

$p = \log_a a^p$

$\boxed{例}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2y-1>0$，よって $y > \dfrac{1}{2}$．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について，右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \ ,$$

例 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2y-1>0$ ，よって $y>\dfrac{1}{2}$ ．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)\geq 2$ について，右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y-1<\frac{1}{4}\ ,$$

$0<a<1$ ， $\mathrm{r}>0$ ， $s>0$ ならば， $\log_a r>\log_a s \iff r<s$ ．対数記号を外すと不等号の向きが逆になる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$2y-1>0$ ，よって $y>\dfrac{1}{2}$ ．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)\geq 2$ について，右辺は $2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1)>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y-1<\frac{1}{4}\ ,$$

$$2y<\frac{5}{4}\ ,$$

$$y<\frac{5}{8}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y に関する不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $2y-1>0$ ，よって $y > \dfrac{1}{2}$ ．与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) \geq 2$ について，右辺は $2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{4}$ なので，

$$\log_{\frac{1}{2}}(2y-1) > \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4} \ ,$$

$$2y-1 < \frac{1}{4} \ ,$$

$$2y < \frac{5}{4} \ ,$$

$$y < \frac{5}{8} \ .$$

故に，与えられた不等式を解くと， $y > \dfrac{1}{2}$ かつ $y < \dfrac{5}{8}$ ，つまり $\dfrac{1}{2} < y < \dfrac{5}{8}$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 10.5.4}$ 変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2 \geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad > 0$, よって $z \qquad$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2 \geq 0$ より,

$$\log_{\frac{1}{3}}(4z-5) \qquad -2 = \log_{\frac{1}{3}} \qquad = \log_{\frac{1}{3}} \qquad = \log_{\frac{1}{3}} \qquad ,$$

$\boxed{\text{問}10.5.4}$ 変数 z に関する不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2\geq 0$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $4z-5>0$, よって $z>\dfrac{5}{4}$. 与えられた不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)+2\geq 0$ より,

$$\log_{\frac{1}{3}}(4z-5)\geq -2=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}}3^2=\log_{\frac{1}{3}}9\ ,$$

$$4z-5\leq 9\ ,$$

$$4z\leq 14\ ,$$

$$z\leq \frac{7}{2}$$

故に, 与えられた不等式を解くと, $z>\dfrac{5}{4}$ かつ $z\leq\dfrac{7}{2}$, つまり $\dfrac{5}{4}<z\leq\dfrac{7}{2}$.

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く.

$\boxed{例}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，

まず対数の式の真数が正になる条件（真数条件）を考える．

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，

例　変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

左辺を一つの対数の式にする．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので，$x+1>0$ かつ $x-7>0$，よって $x>7$．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 \qquad = \log_3 \qquad$ なので，

右辺も底が 3 である一つの対数の式にする．

例　変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$p=\log_a a^p$

例　変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq \log_3 9\ ,$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\} \leq \log_3 9 ,$$

$$(x+1)(x-7) \leq 9 ,$$

$a>1$ ， $r>0$ ， $s>0$ ならば， $\log_a r \leq \log_a s \iff r \leq s$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7) \leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\} \leq \log_3 9 \ ,$$

$$(x+1)(x-7) \leq 9 \ ,$$

$$x^2-6x-16 \leq 0 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq\log_3 9\ ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9\ ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0\ ,$$

$$(x+2)(x-8)\leq 0\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\}\ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq\log_3 9\ ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9\ ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0\ ,$$

$$(x+2)(x-8)\leq 0\ ,$$

$$-2\leq x\leq 8\ .$$

例 変数 x に関する不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ を解く．対数の式の真数は正なので， $x+1>0$ かつ $x-7>0$ ，よって $x>7$ ．与えられた不等式 $\log_3(x+1)+\log_3(x-7)\leq 2$ について，左辺は

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-7) = \log_3\{(x+1)(x-7)\} \ ,$$

右辺は $2=\log_3 3^2=\log_3 9$ なので，

$$\log_3\{(x+1)(x-7)\}\leq \log_3 9 \ ,$$

$$(x+1)(x-7)\leq 9 \ ,$$

$$x^2-6x-16\leq 0 \ ,$$

$$(x+2)(x-8)\leq 0 \ ,$$

$$-2\leq x\leq 8 \ .$$

与えられた不等式を解くと， $x>7$ かつ $-2\leq x\leq 8$ なので， $7<x\leq 8$ ．

終

$\boxed{\text{問}10.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $\qquad >0$ かつ $\qquad >0$, よって $x>\quad$.

与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ より,

$$\log_2\{\qquad\qquad\qquad\}\leq \log_2\quad = \log_2\quad ,$$

$\boxed{問 10.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ を解け.

対数の式の真数は正なので, $x+1>0$ かつ $x-3>0$, よって $x>3$.
与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ より,

$$\log_2\{(x+1)(x-3)\}\leq \log_2 2^5=\log_2 32 \ ,$$

$$(x+1)(x-3)\leq 32 \ ,$$

$$x^2-2x-35\leq 0 \ ,$$

$$(x+5)(x-7)\leq 0 \ ,$$

$$-5\leq x\leq 7 \ .$$

$\boxed{問10.5.5}$ 変数 x に関する不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ を解け.

対数の式の真数は正なので，$x+1>0$ かつ $x-3>0$ ，よって $x>3$.
与えられた不等式 $\log_2(x+1)+\log_2(x-3)\leq 5$ より，

$$\log_2\{(x+1)(x-3)\}\leq \log_2 2^5=\log_2 32 \ ,$$

$$(x+1)(x-3)\leq 32 \ ,$$

$$x^2-2x-35\leq 0 \ ,$$

$$(x+5)(x-7)\leq 0 \ ,$$

$$-5\leq x\leq 7 \ .$$

与えられた不等式を解くと，$x>3$ かつ $-5\leq x\leq 7$ なので，$3<x\leq 7$.

$\boxed{終}$