10.2 対数関数

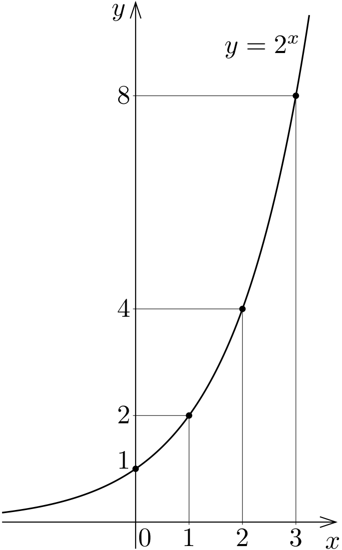
8.6 節で逆関数の定義を述べた.

8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

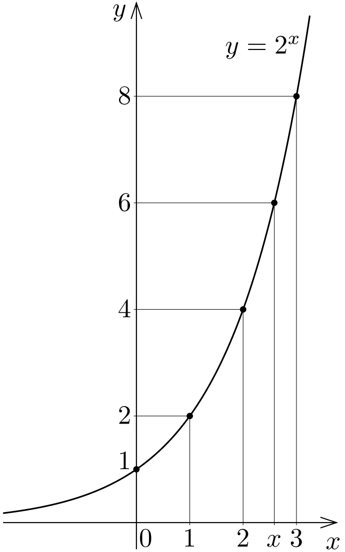
8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y=f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

指数関数の逆関数を考える．

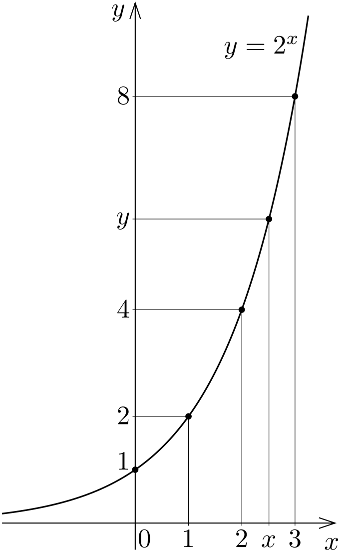
例　底が 2 である指数関数 2^x を考える．その値域は正の実数の全体である．



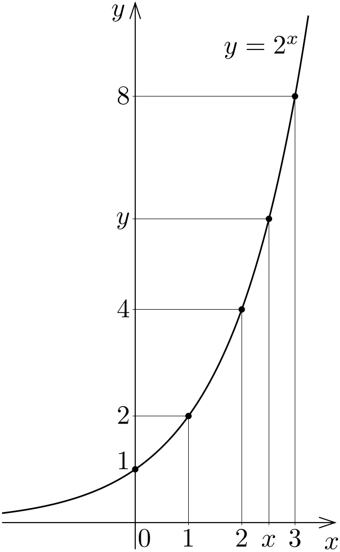
例　底が 2 である指数関数 2^x を考える．その値域は正の実数の全体である．xy 座標平面における関数 $y=2^x$ のグラフを見ると，例えば 6 に対して $2^x=6$ である実数 x が唯一つある．



例　底が 2 である指数関数 2^x を考える．その値域は正の実数の全体である．xy 座標平面における関数 $y=2^x$ のグラフを見ると，例えば 6 に対して $2^x=6$ である実数 x が唯一つある．このように，正の各実数 y に対して $y=2^x$ である実数 x が唯一つある．

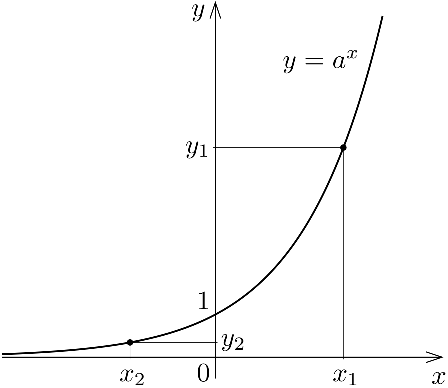


$\boxed{例}$ 底が 2 である指数関数 2^x を考える．その値域は正の実数の全体である．xy 座標平面における関数 $y = 2^x$ のグラフを見ると，例えば 6 に対して $2^x = 6$ である実数 x が唯一つある．このように，正の各実数 y に対して $y = 2^x$ である実数 x が唯一つある．これより，指数関数 2^x の逆関数がある．

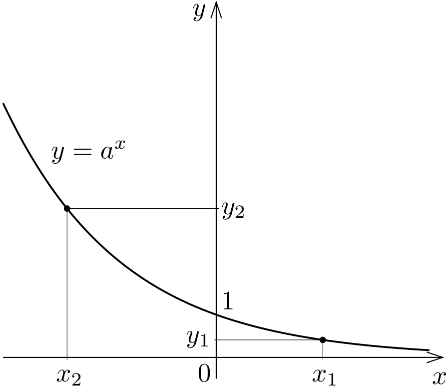


$\boxed{終}$

定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は正の実数の全体 $(0,\infty)$ である．グラフから分かるように，正の各実数 y に対して $y=a^x$ である実数 x が唯一つある．



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

正の各実数 y に対して $y = a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．

正の各実数 y に対して $y = a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

正の各実数 y に対して $y = a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

[定義] 1 でない正の定数 a を底とする実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする対数関数という．a を底とする対数関数の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す．対数関数の定義域は正の実数の集合である．

正の各実数 y に対して $y=a^x$ である実数 x が唯一つある．よって指数関数 a^x の逆関数がある．実数全体を定義域とする指数関数 a^x について，値域は正の実数の全体なので，その逆関数の定義域は正の実数の全体である．

[定義] 1 でない正の定数 a を底とする実数全体を定義域とする指数関数 a^x の逆関数を，a を底とする対数関数という．a を底とする対数関数の実数 x における値を $\log_a x$ と書き表す．対数関数の定義域は正の実数の集合である．

　対数関数の定義域は本来は正の実数の全体であるが，正の実数の集合（つまり正の実数の全体の部分集合）でもかまわない．特に断りがないときは対数関数の定義域は正の実数の全体であるとする．

1 でない正の実数 a を底とする対数関数の正の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の対数という.

1 でない正の実数 a を底とする対数関数の正の実数 r における値 $\log_a r$ を，a を底とする r の対数という．

r の対数を表す式 $\log_a r$ において，r を真数という．対数関数 $\log_a x$ の定義域は正の実数の集合なので，

対数を表す式 $\log_a r$ の真数 r は正の実数である

ことに注意すること．

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } p \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } r \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = r \ .$$

この定理を指数関数・対数関数に適用する.

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } p \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(p)\big) = p \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } r \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(r)\big) = r \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく：$f(x) = a^x$ ．f の定義域は実数全体とする．a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_a x$ ．

[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } p \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(p)\big) = p \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } r \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(r)\big) = r \ .$$

　定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく：$f(x) = a^x$ ．f の定義域は実数全体とする．a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_a x$ ．各実数 p について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(p)\big) = p$ ，$f^{-1}\big(f(p)\big) = \log_a\{f(p)\} = \log_a(a^p)$ なので

$$\log_a(a^p) = p \ .$$

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } p \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } r \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = r \ .$$

定数 a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数を f とおく：$f(x) = a^x$ ．f の定義域は実数全体とする．a を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は a を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_a x$ ．各実数 p について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = p$ ，$f^{-1}\bigl(f(p)\bigr) = \log_a\{f(p)\} = \log_a(a^p)$ なので

$$\log_a(a^p) = p \ .$$

f の値域は正の実数の全体である．正の各実数 r について，定理 **8.6.3** により $f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = r$ ，$f\bigl(f^{-1}(r)\bigr) = a^{f^{-1}(r)} = a^{\log_a r}$ なので

$$a^{\log_a r} = r \ .$$

[定理 10.2.1]　実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする.

任意の実数 p について $\log_a(a^p) = p$.

$r > 0$ である任意の実数 r について $a^{\log_a r} = r$.

[定理 10.2.1]　実数 a について $a>0$, $a\neq 1$ とする.

$$\text{任意の実数 } p \text{ について } \log_a(a^p)=p \ .$$

$$r>0 \text{ である任意の実数 } r \text{ について } a^{\log_a r}=r \ .$$

例えば次のようになる.

$$81=3^4 \text{ なので } \log_3 81=\log_3 3^4=4 \ .$$

[定理 10.2.1]　実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする.

$$\text{任意の実数 } p \text{ について } \log_a(a^p)=p \ .$$

$$r>0 \text{ である任意の実数 } r \text{ について } a^{\log_a r}=r \ .$$

例えば次のようになる.

$$81=3^4 \ \text{ なので } \ \log_3 81=\log_3 3^4=4 \ .$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3} \ \text{ なので } \ \log_2 \frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3 \ .$$

[定理 10.2.1]　実数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．

$$\text{任意の実数 } p \text{ について } \log_a(a^p) = p \text{ ．}$$

$$r>0 \text{ である任意の実数 } r \text{ について } a^{\log_a r} = r \text{ ．}$$

例えば次のようになる．

$$81 = 3^4 \text{ なので } \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \text{ ．}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} \text{ なので } \log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3 \text{ ．}$$

$$5^{\log_5 7} = 7 \text{ ．}$$

a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a (a^0) = 0 \ .$$

a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a = a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a = a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と，$\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくある．

a は実数で $a>0$ ，$a \neq 1$ とする． $1=a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a=a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と，$\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくある．次のことに注意すること：

$\log_a RS = \log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり，

$\log_a R^p = \log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である．

a は実数で $a > 0$ ，$a \neq 1$ とする． $1 = a^0$ なので，

$$\log_a 1 = \log_a(a^0) = 0 \ .$$

$a = a^1$ なので，

$$\log_a a = \log_a(a^1) = 1 \ .$$

対数の式 $\log_a(RS)$ を $\log_a RS$ と，$\log_a(R^p)$ を $\log_a R^p$ と略すことがよくある．次のことに注意すること：

$\log_a RS = \log_a(RS)$ と $(\log_a R)S$ とは全く別の意味であり，

$\log_a R^p = \log_a(R^p)$ と $(\log_a R)^p$ とは全く別の意味である．

また例えば，$\log_a R + S$ は $(\log_a R) + S$ のことである；$\log_a(R+S)$ との違いに注意すること．

$\boxed{例}$ 次の式を計算する： $\log_3 9 + 18$, $\log_2(16 + 48)$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の式を計算する： $\log_3 9+18$, $\log_2(16+48)$.

$$\log_3 9+18 = \log_3 3^2+18 = 2+18 = 20 \ .$$

$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき， $\log_a a^p = p$.

例 次の式を計算する： $\log_3 9+18$, $\log_2(16+48)$.

$$\log_3 9+18 = \log_3 3^2+18 = 2+18 = 20 \ .$$

$$\log_2(16+48)=\log_2 64=\log_2 2^6=6 \ .$$

終

$a>0$ かつ $a\neq 1$ のとき， $\log_a a^p=p$.

$\boxed{問 10.2.1}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\log_5(25+100)$，$\log_2 8+24$ ．

$\boxed{問10.2.1}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\log_5(25+100)$，$\log_2 8+24$ ．

$$\log_5(25+100) = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3\ .$$

$\boxed{問10.2.1}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\log_5(25+100)$，$\log_2 8+24$ ．

$$\log_5(25+100) = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3 \ .$$

$$\log_2 8+24 = \log_2 2^3 + 24 = 3+24 = 27 \ .$$

$\boxed{終}$

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_7 \frac{1}{49}$, $\log_3\left(27\sqrt{3}\right)$.

例　次の式を計算して簡単にする：$\log_7 \dfrac{1}{49}$，$\log_3\left(27\sqrt{3}\right)$．

$$\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = \log_7 7^{-2} = -2 \ .$$

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき，$\log_a a^p = p$ ．

例 次の式を計算して簡単にする： $\log_7 \dfrac{1}{49}$，$\log_3\left(27\sqrt{3}\right)$．

$$\log_7 \frac{1}{49} = \log_7 \frac{1}{7^2} = \log_7 7^{-2} = -2 \ .$$

$$\log_3\left(27\sqrt{3}\right) = \log_3\left(3^3 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 3^{3+\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2} \ .$$ 終

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき，$\log_a a^p = p$．

$\boxed{問10.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(81\sqrt{3})$ ．

$\boxed{\text{問}10.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(81\sqrt{3})$ ．

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5} = -5 \ .$$

$\boxed{問 10.2.2}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\log_2 \dfrac{1}{32}$ ，$\log_3(81\sqrt{3})$ ．

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5} = -5 \ .$$

$$\log_3(81\sqrt{3}) = \log_3\left(3^4 3^{\frac{1}{2}}\right) = \log_3 3^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{2} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 次の式を計算して簡単にする：$3^{2+\log_3 7}$，$7^{5\log_7 2}$．

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 7}$$

$$a^{p+q} = a^p a^q$$

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63 \ .$$

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ かつ $r > 0$ のとき, $a^{\log_a r} = r$.

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63 \ .$$

$$7^{5\log_7 2} = 7^{(\log_7 2)\cdot 5} = \left(7^{\log_7 2}\right)^5$$

$$a^{pq} = (a^p)^q$$

終

例 次の式を計算して簡単にする： $3^{2+\log_3 7}$, $7^{5\log_7 2}$.

$$3^{2+\log_3 7} = 3^2 \cdot 3^{\log_3 7} = 9 \cdot 7 = 63 \ .$$

$$7^{5\log_7 2} = 7^{(\log_7 2)\cdot 5} = \left(7^{\log_7 2}\right)^5 = 2^5 = 32 \ .$$

終

$a > 0$ かつ $a \neq 1$ かつ $r > 0$ のとき， $a^{\log_a r} = r$.

問10.2.3 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$ ，$5^{4\log_5 3}$ ．

$\boxed{問10.2.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$ ，$5^{4\log_5 3}$ ．

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40 \ .$$

$\boxed{\text{問}10.2.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$2^{3+\log_2 5}$ ，$5^{4\log_5 3}$ ．

$$2^{3+\log_2 5} = 2^3 \cdot 2^{\log_2 5} = 8 \cdot 5 = 40 \ .$$

$$5^{4\log_5 3} = \left(5^{\log_5 3}\right)^4 = 3^4 = 81 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする指数関数 f の底は 3 であるとする．f の逆関数 f^{-1} について，7 における値と $\dfrac{1}{243}$ における値とを求めよ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする指数関数 f の底は 3 であるとする．f の逆関数 f^{-1} について，7 における値と $\dfrac{1}{243}$ における値とを求める．3 を底とする指数関 f の逆関数 f^{-1} は 3 を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_3 x$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする指数関数 f の底は 3 であるとする．f の逆関数 f^{-1} について，7 における値と $\dfrac{1}{243}$ における値とを求める．3 を底とする指数関数 f の逆関数 f^{-1} は 3 を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_3 x$ ．7 における f^{-1} の値は

$$f^{-1}(7) = \log_3 7 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする指数関数 f の底は 3 であるとする．f の逆関数 f^{-1} について，7 における値と $\dfrac{1}{243}$ における値とを求める．3 を底とする指数関 f の逆関数 f^{-1} は 3 を底とする対数関数である：$f^{-1}(x) = \log_3 x$ ．7 における f^{-1} の値は

$$f^{-1}(7) = \log_3 7 \ .$$

$\dfrac{1}{243}$ における f^{-1} の値は

$$f^{-1}\Big(\frac{1}{243}\Big) = \log_3 \frac{1}{243} = \log_3 \frac{1}{3^5} = \log_2 3^{-5} = -5 \ .$$

$\boxed{\text{問}\,10.2.4}$ 実数全体を定義域とする指数関数 g の底は 2 であるとする．g の逆関数 g^{-1} について，13 における値と $\dfrac{1}{256}$ における値とを求めよ．

　2 を底とする指数関 g の逆関数 g^{-1} は　　を底とする　　　関数である：$g^{-1}(x) =$ 　　　　．13 における g^{-1} の値は

$$g^{-1}(13) =$$

$\dfrac{1}{256}$ における g^{-1} の値は

$$g^{-1}\left(\frac{1}{256}\right) =$$

$\boxed{問10.2.4}$ 実数全体を定義域とする指数関数 g の底は 2 であるとする．g の逆関数 g^{-1} について，13 における値と $\frac{1}{256}$ における値とを求めよ．

　2 を底とする指数関 g の逆関数 g^{-1} は 2 を底とする対数関数である：$g^{-1}(x) = \log_2 x$ ． 13 における g^{-1} の値は

$$g^{-1}(13) =$$

$\frac{1}{256}$ における g^{-1} の値は

$$g^{-1}\left(\frac{1}{256}\right) =$$

$\boxed{\text{問}10.2.4}$ 実数全体を定義域とする指数関数 g の底は 2 であるとする．g の逆関数 g^{-1} について，13 における値と $\dfrac{1}{256}$ における値とを求めよ．

3 を底とする指数関 g の逆関数 g^{-1} は 2 を底とする対数関数である：$g^{-1}(x) = \log_2 x$ ．13 における g^{-1} の値は

$$g^{-1}(13) = \log_2 13 \ .$$

$\dfrac{1}{256}$ における g^{-1} の値は

$$g^{-1}\Big(\frac{1}{256}\Big) =$$

$\boxed{\text{問}10.2.4}$ 実数全体を定義域とする指数関数 g の底は 2 であるとする．g の逆関数 g^{-1} について，13 における値と $\dfrac{1}{256}$ における値とを求めよ．

2 を底とする指数関 g の逆関数 g^{-1} は 2 を底とする対数関数である：$g^{-1}(x) = \log_2 x$ ．13 における g^{-1} の値は

$$g^{-1}(13) = \log_2 13 \ .$$

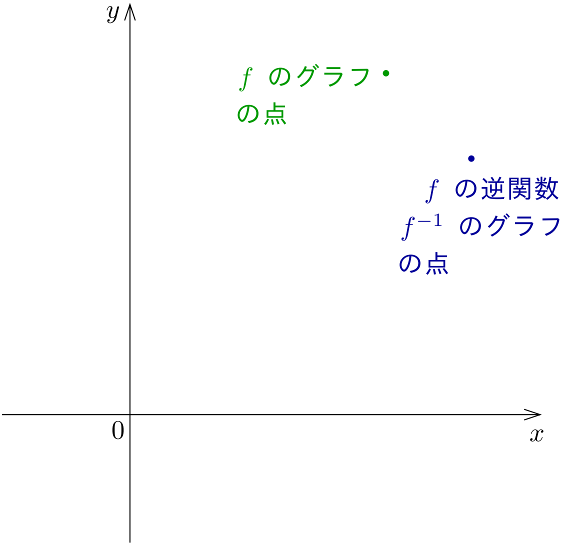
$\dfrac{1}{256}$ における g^{-1} の値は

$$g^{-1}\left(\frac{1}{256}\right) = \log_2 \frac{1}{2^8} = \log_2 2^{-8} = -8 \ .$$

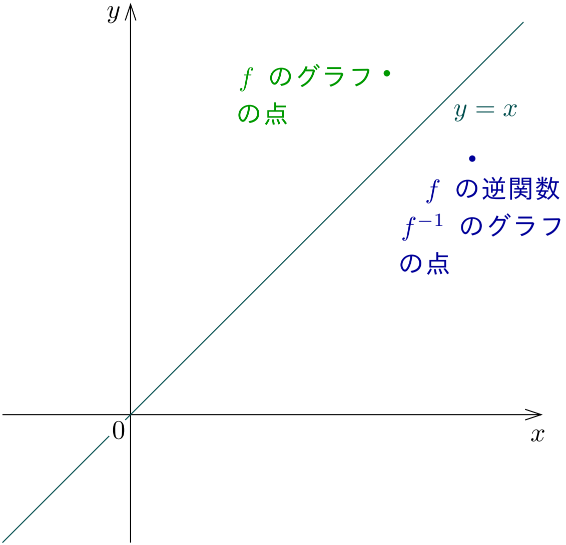
$\boxed{\text{終}}$

8.7 節で，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフについて述べた．

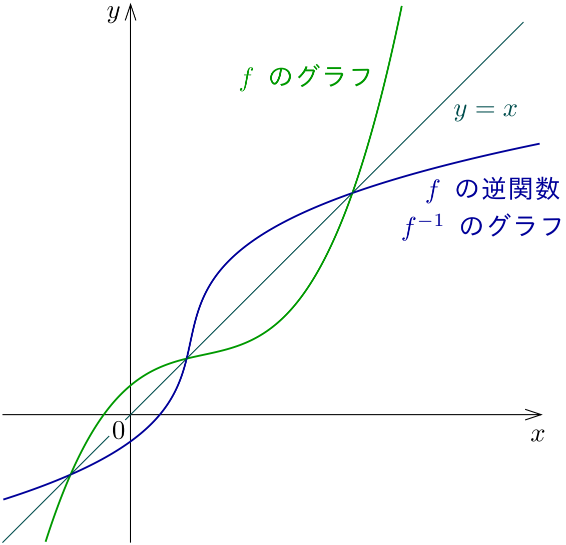
8.7 節で，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフについて述べた．xy 座標平面において，f のグラフの点と対応する f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる．



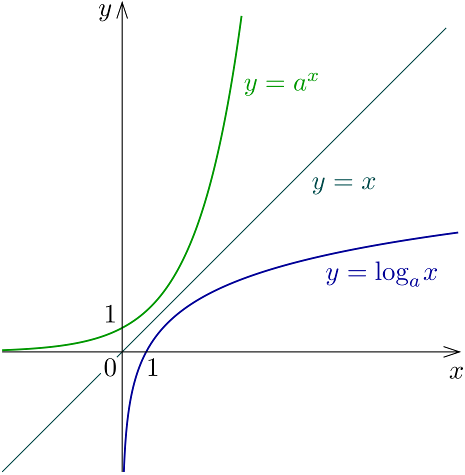
8.7 節で，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフについて述べた．xy 座標平面において，f のグラフの点と対応する f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる．x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y = x$ に関して対称である．



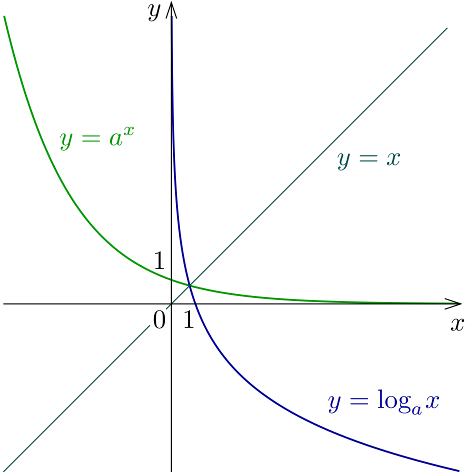
8.7 節で，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフについて述べた．xy 座標平面において，f のグラフの点と対応する f^{-1} のグラフの点とでは x 座標と y 座標とが入れ替わる．x 座標と y 座標とが入れ替わった点は元の点と直線 $y = x$ に関して対称である．よって，関数 f の逆関数 f^{-1} のグラフは f のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．



定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．a を底とする対数関数 $\log_a x$ は a を底とする指数関数 a^x の逆関数なので，xy 座標平面において $y = \log_a x$ のグラフは $y = a^x$ のグラフと直線 $y = x$ に関して対称である．



$a > 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = \log_a x$ のグラフ

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていくが，y 軸と交わらない．つまり，y 軸は $y = \log_a x$ のグラフの漸近線である．

対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは y 軸に限りなく近付いていくが，y 軸と交わらない．つまり，y 軸は $y=\log_a x$ のグラフの漸近線である．

グラフから分かるように，次の定理が成り立つ．

[定理 10.2.2] 定数 a は実数で $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．定義域が正の実数の全体である対数関数 $\log_a x$ の値域は実数全体である．また，対数関数 $\log_a x$ は，$a>1$ のとき単調増加であり，$0<a<1$ のとき単調減少である．