

10.1 指数関数

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる. 従って, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると, この対応は関数になる.

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる. 従って, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると, この対応は関数になる.

[定義] 1 でない正の定数 a に対して, 各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を, 底が a である指数関数という.

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる. 従って, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると, この対応は関数になる.

[定義] 1 でない正の定数 a に対して, 各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を, 底が a である指数関数という.

任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x があるので, 指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができる. 以後, 特に断りがない限り, 指数関数の定義域は実数全体であるとする.

定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 任意の実数 x に対して a の冪 a^x の値が唯一つ定まる. 従って, 実数 x に対して x を指数とする冪 a^x を定めると, この対応は関数になる.

[定義] 1 でない正の定数 a に対して, 各実数 x に対して x を指数とする a の冪 a^x を定める対応を, 底が a である指数関数という.

任意の実数 x に対して指数関数の値 a^x があるので, 指数関数 a^x は実数全体を定義域にすることができる. 以後, 特に断りがない限り, 指数関数の定義域は実数全体であるとする.

$a = 1$ のときは, 任意の実数 x に対して $a^x = 1^x = 1$ なので, 変数 x の関数 a^x は定数関数である. 従って, $a = 1$ のときは関数 a^x を指数関数とは考えない.

例えば、実数を表す変数 x について、

x の関数 3^x は底が 3 の指数関数であり、

x の関数 $\left(\frac{2}{7}\right)^x$ は底が $\frac{2}{7}$ の指数関数であり、

x の関数 $\sqrt{14}^x$ は底が $\sqrt{14}$ の指数関数である。

例えば、実数を表す変数 x について、

x の関数 3^x は底が 3 の指数関数であり、

x の関数 $\left(\frac{2}{7}\right)^x$ は底が $\frac{2}{7}$ の指数関数であり、

x の関数 $\sqrt{14}^x$ は底が $\sqrt{14}$ の指数関数である。

冪関数と指数関数との違いに注意すること。冪関数では底が変数で指数が定数であり、指数関数では指数が変数で底が定数である。定数 p と a ($a > 0, a \neq 1$) とに対して次のようになる：

指数が p の冪関数 x^p

↑ 底は変数

↓ 指数は定数

底が a の指数関数 a^x

↑ 底は定数

↓ 指数は変数

例 指数関数 f の底は 9 であるとする. $f(x) = 9^x$.

例 指数関数 f の底は 9 であるとする. $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 .$$

例 指数関数 f の底は 9 であるとする. $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} .$$

例 指数関数 f の底は 9 であるとする. $f(x) = 9^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 9^3 = 729 .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81} .$$

$\frac{3}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 9^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} = 3^3 = 27 .$$

終

問10.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) =$. 3 における f の値は

$$f(3) =$$

-2 における f の値は

$$f(-2) =$$

$\frac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) =$$

問10.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$. 3 における f の値は

$$f(3) =$$

-2 における f の値は

$$f(-2) =$$

$\frac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) =$$

問10.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64.$$

-2 における f の値は

$$f(-2) =$$

$\frac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) =$$

問10.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64 .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} .$$

$\frac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) =$$

問10.1 関数 f は 4 を底とする指数関数であるとする. 3 における f の値と -2 における f の値と $\frac{5}{2}$ における f の値とを求めよ.

関数 f は 4 を底とする指数関数なので $f(x) = 4^x$. 3 における f の値は

$$f(3) = 4^3 = 64 .$$

-2 における f の値は

$$f(-2) = 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} .$$

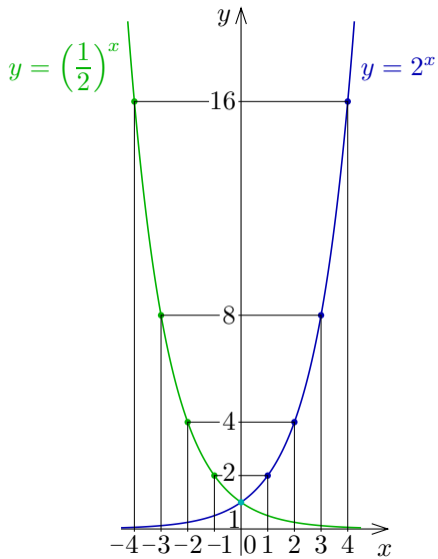
$\frac{5}{2}$ における f の値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 4^{\frac{5}{2}} = (2^2)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32 .$$

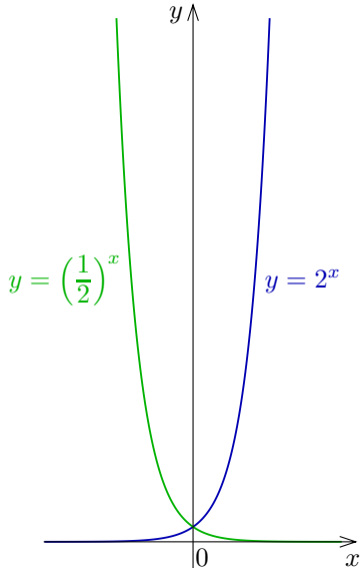
終

例として、指数関数 2^x と $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ とを考える. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$. xy 座標平面において、 $y = 2^x$ のグラフと $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフとを描く.

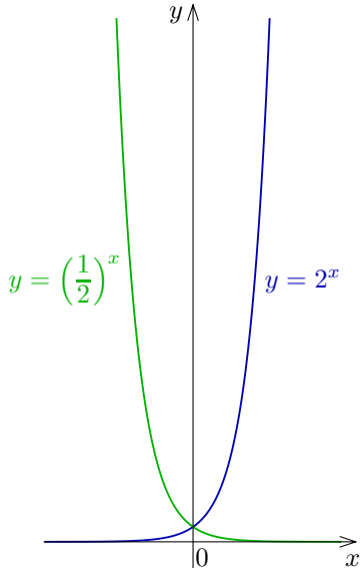
x の値	2^x の値	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値
-4	$\frac{1}{16} = 0.0625$	16
-3	$\frac{1}{8} = 0.125$	8
-2	$\frac{1}{4} = 0.25$	4
-1	$\frac{1}{2} = 0.5$	2
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2} = 0.5$
2	4	$\frac{1}{4} = 0.25$
3	8	$\frac{1}{8} = 0.125$
4	16	$\frac{1}{16} = 0.0625$



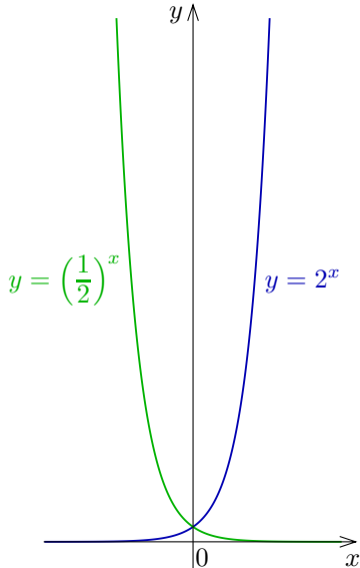
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ の
グラフと y 軸に関して対称であ
る。



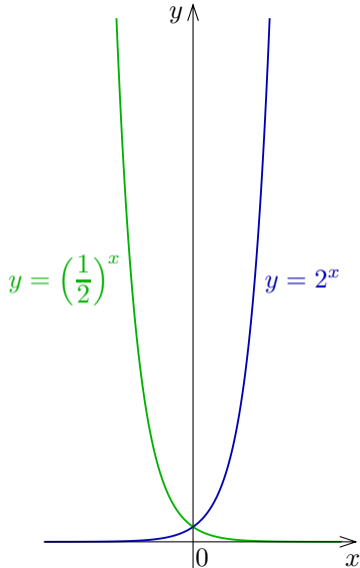
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ の
グラフと y 軸に関して対称であ
る. 例えば関数 $y = 2^x$ について,
 $x = -3, -4, -5, -6, \dots$ としていく
と, $y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125,$
 $0.015625, 0.0078125, \dots$ のように y
の値は 0 に近づいていく.



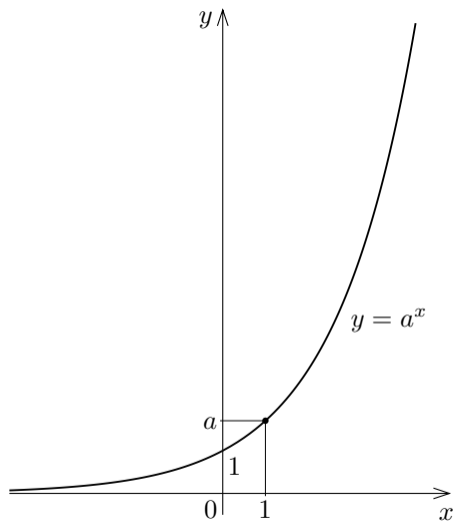
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ の
グラフと y 軸に関して対称であ
る. 例えば関数 $y = 2^x$ について,
 $x = -3, -4, -5, -6, \dots$ としていく
と, $y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125,$
 $0.015625, 0.0078125, \dots$ のように y
の値は 0 に近づいていく. しかし,
変数 x の値が何であっても $2^x > 0$
なので, $y = 2^x$ のグラフは x 軸と
交わることはない. なので x 軸は
 $y = 2^x$ のグラフの漸近線である.



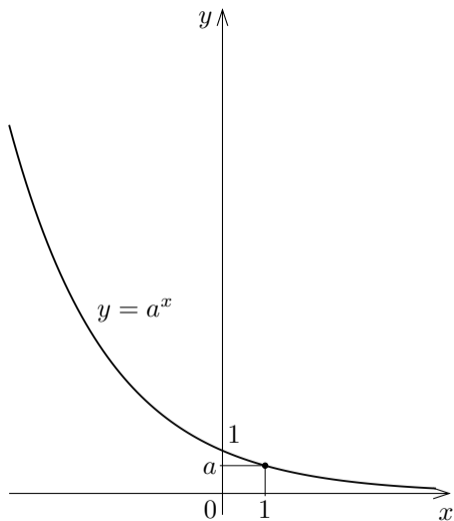
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y = 2^x$ の
グラフと y 軸に関して対称であ
る. 例えば関数 $y = 2^x$ について,
 $x = -3, -4, -5, -6, \dots$ としていく
と, $y = 2^x = 0.125, 0.0625, 0.03125,$
 $0.015625, 0.0078125, \dots$ のように y
の値は 0 に近づいていく. しかし,
変数 x の値が何であっても $2^x > 0$
なので, $y = 2^x$ のグラフは x 軸と
交わることはない. なので x 軸は
 $y = 2^x$ のグラフの漸近線である. ま
た x 軸は $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフの漸
近線でもある.



定数 a は実数で $a > 0$, $a \neq 1$ とする. $a > 1$ のときと $0 < a < 1$ のときに分けて, xy 座標平面において指数関数 $y = a^x$ のグラフを描く. $a^0 = 1$, $a^1 = a$ なので, $y = a^x$ のグラフは点 $(0, 1)$ と点 $(1, a)$ とが属す. また, x 軸は $y = a^x$ のグラフの漸近線である.



$a > 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ



$0 < a < 1$ のときの $y = a^x$ のグラフ

グラフから分かるように次の定理が成り立つ.

[定理 10.1] 定数 a は実数で $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 定義域が実数全体である指数関数 a^x の値域は区間 $(0, \infty)$ である. また, 指数関数 a^x は, $a > 1$ のとき単調増加であり, $0 < a < 1$ のとき単調減少である.