

9.8 指数の拡張

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる.

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる. 例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える.

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる．例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える． $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ なので，次のような値を計算できる：

$$3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\dots,$$

$$3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\dots,$$

$$3^{1.4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\dots,$$

$$3^{1.41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\dots,$$

$$3^{1.414213} = 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\dots,$$

$$3^{1.4142135} = 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\dots,$$

$$3^{1.41421356} = 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\dots,$$

$$3^{1.414213562} = 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\dots,$$

冪の指数の範囲を実数全体にまで更に広げる. 例として 3 の $\sqrt{2}$ 乗 $3^{\sqrt{2}}$ を考える. $\sqrt{2} = 1.414213562\dots$ なので, 次のような値を計算できる:

$$3^{1.41} = 3^{\frac{141}{100}} = 4.70\dots,$$

$$3^{1.414} = 3^{\frac{1414}{1000}} = 4.727\dots,$$

$$3^{1.4142} = 3^{\frac{14142}{10000}} = 4.7287\dots,$$

$$3^{1.41421} = 3^{\frac{141421}{100000}} = 4.72878\dots,$$

$$3^{1.414213} = 3^{\frac{1414213}{1000000}} = 4.728801\dots,$$

$$3^{1.4142135} = 3^{\frac{14142135}{10000000}} = 4.7288041\dots,$$

$$3^{1.41421356} = 3^{\frac{141421356}{100000000}} = 4.72880437\dots,$$

$$3^{1.414213562} = 3^{\frac{1414213562}{1000000000}} = 4.728804385\dots,$$

このように, 指数を $\sqrt{2} = 1.41421356237\dots$ に近づけていくと 3 の冪は $4.7288043878374\dots$ に近づいていく. このことより, $3^{\sqrt{2}} = 4.7288043878374\dots$ と考える.

このようにして、任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる。そして、前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる。

このようにして、任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる。そして、前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる。

[実数指数の指数法則] 任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について、

$$a^p a^q = a^{p+q} \quad , \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \quad , \quad (a^p)^q = a^{pq} \quad ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad .$$

このようにして、任意の正の実数 a と任意の実数 p とに対して a の p 乗 a^p を定義することができる。そして、前述の指数法則も指数が実数である場合にそのまま拡張できる。

[実数指数の指数法則] 任意の正の実数 a, b 及び任意の実数 p, q について、

$$a^p a^q = a^{p+q} , \quad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} , \quad (a^p)^q = a^{pq} ;$$

$$(ab)^p = a^p b^p , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} .$$

正の数の冪の値はいつも正である。

[定理] 任意の正の実数 a 及び任意の実数 p について $a^p > 0$.