9.6 指数の拡張

　実数 a 及び自然数 n に対して，a の n 乗 a^n を a の冪または累乗といった．冪の式 a^n において，n を指数といい，a を底といった．

実数 a 及び自然数 n に対して，a の n 乗 a^n を a の冪または累乗といった．冪の式 a^n において，n を指数といい，a を底といった．これまでは冪の指数は自然数の範囲で考えてきたが，冪の指数を整数の範囲にまで広げる．つまり，実数 a の -3 乗 a^{-3} とか -5 乗 a^{-5} などのような冪を考える．

冪の指数を整数の範囲に広げてもこれまで学んだ指数法則は同じ形で成り立つことが望ましい．例えば仮に $m=-3$ ，$n=3$ のとき指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると，

$$a^{-3}a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1 \ ,$$

よって $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ ．

冪の指数を整数の範囲に広げてもこれまで学んだ指数法則は同じ形で成り立つことが望ましい．例えば仮に $m=-3$ ，$n=3$ のとき指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると，

$$a^{-3}a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1 \ ,$$

よって $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ ．そこで，指数が負の整数である冪を次のように定義する．

[定義] 0 以外の数 a 及び正の整数 n に対して，a の $-n$ 乗 a^{-n} を次のように定義する：

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ .$$

冪の指数を整数の範囲に広げてもこれまで学んだ指数法則は同じ形で成り立つことが望ましい．例えば仮に $m=-3$ ，$n=3$ のとき指数法則 $a^m a^n = a^{m+n}$ が成り立つとすると，

$$a^{-3}a^3 = a^{-3+3} = a^0 = 1 \ ,$$

よって $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$ ．そこで，指数が負の整数である冪を次のように定義する．

[定義] 0 以外の数 a 及び正の整数 n に対して，a の $-n$ 乗 a^{-n} を次のように定義する：

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \ .$$

例えば次のようになる：

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} \ ; \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} \ .$$

例 次の式を計算して簡単にする： $\left(\dfrac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{-3}$.

例 次の式を計算して簡単にする： $\left(\dfrac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{-3}$.

$$\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt[3]{7}}{5}\right)^{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{7}^{\,3}}{5^3}} = \frac{1}{\frac{7}{125}} = \frac{125}{7}\ .$$

終

$\boxed{\text{問}9.6.1}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{57}}\right)^{-4}$.

$\boxed{問9.6.1}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{57}}\right)^{-4}$.

$$\left(\frac{3}{\sqrt[4]{57}}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\dfrac{3}{\sqrt[4]{57}}\right)^{4}} = \frac{1}{\dfrac{3^4}{\sqrt[4]{57}^{\,4}}} = \frac{1}{\dfrac{3^4}{57}} = \frac{57}{3^4} = \frac{19}{3^3}$$

$$= \frac{19}{27}\ .$$

$\boxed{終}$

以前に学んだ指数法則は，冪の指数を整数の範囲にまで拡張してもほぼ同じ形で成り立つ．但し，指数が負の整数 n である冪 a^n を考えるときは $a \neq 0$ でなければならない．

[整数指数の指数法則] 0 以外の任意の数 a, b 及び任意の整数 m, n について，

$$a^m a^n = a^{m+n} \ , \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ , \qquad (a^m)^n = a^{mn} \ ;$$

$$(ab)^n = a^n b^n \ , \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \ .$$

例　0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする：$(ab^2)^3(a^3b)^{-2}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

例　0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にする：$(ab^2)^3(a^3b)^{-2}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

$$\begin{aligned}(ab^2)^3(a^3b)^{-2} &= a^3(b^2)^3(a^3)^{-2}b^{-2} = a^3b^6a^{-6}b^{-2} = a^3a^{-6}b^6b^{-2} = a^{-3}b^4 \\ &= \frac{b^4}{a^3}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問9.6.2}$　0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にせよ: $(a^2b^3)^2(a^3b)^{-3}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$\boxed{\text{問}9.6.2}$ 0 以外の数 a, b に対して次の式を計算して簡単にせよ：$(a^2b^3)^2(a^3b)^{-3}$．結果は指数が正の数の a や b の冪の式かまたは a や b そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$
\begin{aligned}
(a^2b^3)^2(a^3b)^{-3} &= (a^2)^2(b^3)^2(a^3)^{-3}b^{-3} = a^4b^6a^{-9}b^{-3} = a^{-5}b^3 \\
&= \frac{b^3}{a^5} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

例　0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする：$\left(\dfrac{x^4}{y}\right)^2 (x^2y)^{-3}$.
結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

例 0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にする：$\left(\frac{x^4}{y}\right)^2 (x^2y)^{-3}$.
結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

$$\left(\frac{x^4}{y}\right)^2 (x^2y)^{-3} = \frac{(x^4)^2}{y^2}(x^2)^{-3}y^{-3} = \frac{x^8}{y^2}x^{-6}y^{-3} = x^8x^{-6}\frac{y^{-3}}{y^2} = x^2y^{-5}$$
$$= \frac{x^2}{y^5} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}9.6.3}$　0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にせよ：$\left(\dfrac{y^3}{x}\right)^4 (xy^2)^{-3}$．結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ．

$\boxed{問9.6.3}$ 0 以外の数 x, y に対して次の式を計算して簡単にせよ: $\left(\dfrac{y^3}{x}\right)^4 (xy^2)^{-3}$. 結果は指数が正の数の x や y の冪の式かまたは x や y そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$\begin{aligned}\left(\frac{y^3}{x}\right)^4 (xy^2)^{-3} &= \frac{(y^3)^4}{x^4} x^{-3} (y^2)^{-3} = \frac{y^{12}}{x^4} x^{-3} y^{-6} = \frac{x^{-3}}{x^4} y^{12} y^{-6} = x^{-7} y^6 \\ &= \frac{y^6}{x^7} .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にする：$r^4 s^2 \left(\dfrac{r^2}{s}\right)^{-3}$．結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

例　0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にする：$r^4 s^2 \left(\dfrac{r^2}{s}\right)^{-3}$．結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表す.

$$\begin{aligned} r^4 s^2 \left(\frac{r^2}{s}\right)^{-3} &= r^4 s^2 \frac{(r^2)^{-3}}{s^{-3}} = r^4 s^2 \frac{r^{-6}}{s^{-3}} = r^4 r^{-6} \frac{s^2}{s^{-3}} = r^{-2} s^5 \\ &= \frac{s^5}{r^2} \ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{問9.6.4}$ 0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にせよ：$r^4 s\left(\dfrac{r^3}{s^2}\right)^{-2}$. 結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$\boxed{\text{問}9.6.4}$ 0 以外の数 r, s に対して次の式を計算して簡単にせよ：$r^4 s\left(\dfrac{r^3}{s^2}\right)^{-2}$.
結果は指数が正の数の r や s の冪の式かまたは r や s そのものだけから成る積や分数の形の式で書き表せ.

$$\begin{aligned} r^4 s\left(\frac{r^3}{s^2}\right)^{-2} &= r^4 s\frac{(r^3)^{-2}}{(s^2)^{-2}} = r^4 s\frac{r^{-6}}{s^{-4}} = r^4 r^{-6}\frac{s}{s^{-4}} = r^{-2}s^5 \\ &= \frac{s^5}{r^2}\ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$