9.5 冪関数の逆関数

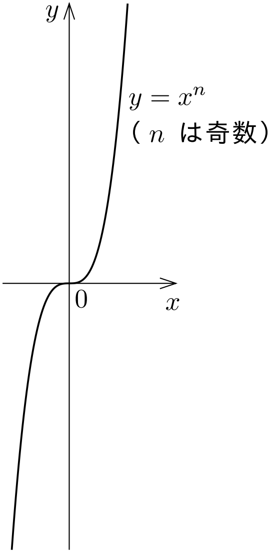
8.6 節で逆関数の定義を述べた.

8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

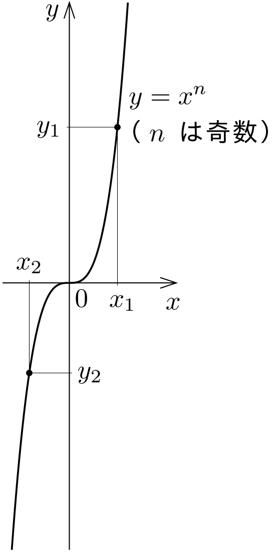
8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

冪関数の逆関数を考える．

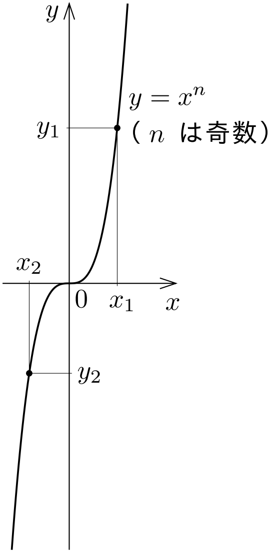
　指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える.



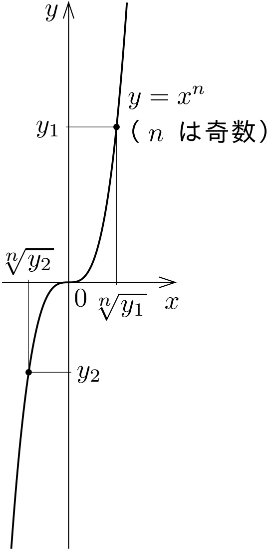
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．xy 座標平面における関数 $y=x^n$ のグラフを見ると，各実数 y に対して $y=x^n$ である実数 x が唯一つある．



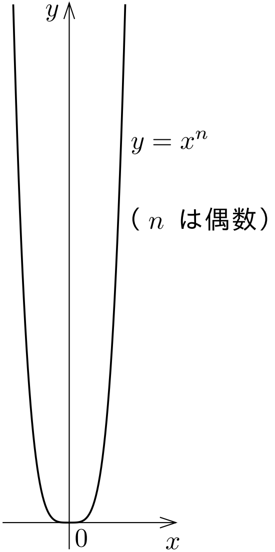
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．xy 座標平面における関数 $y=x^n$ のグラフを見ると，各実数 y に対して $y=x^n$ である実数 x が唯一つある．よって，指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は実数全体である．



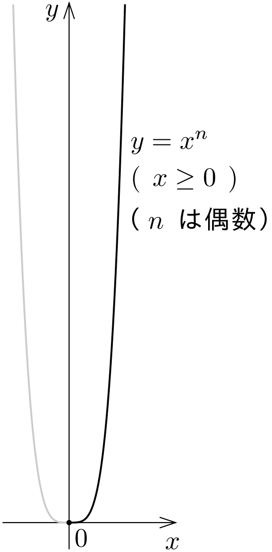
指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n を考える．xy 座標平面における関数 $y=x^n$ のグラフを見ると，各実数 y に対して $y=x^n$ である実数 x が唯一つある．よって，指数が正の奇数 n であり定義域が実数全体である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は実数全体である．指数が正の奇数 n である冪関数 x^n の逆関数の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．



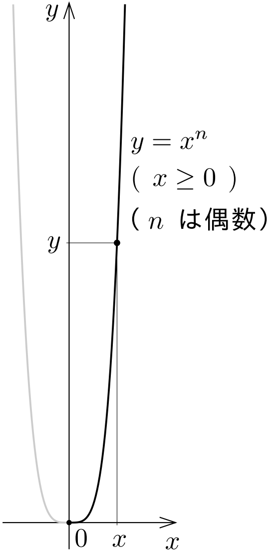
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える.



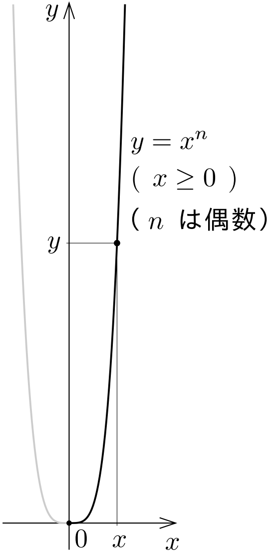
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える.
逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする.



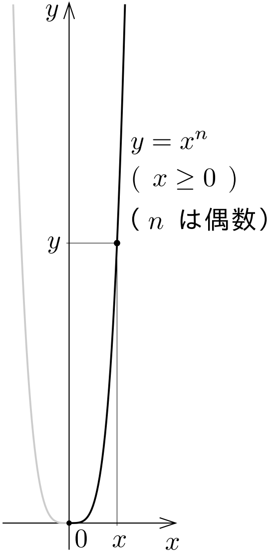
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．xy 座標平面における関数 $y = x^n$（ $x \geq 0$ ）のグラフを見ると，0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．



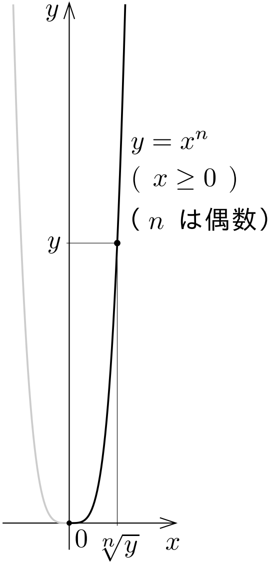
指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える. 逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする. xy 座標平面における関数 $y = x^n$ ($x \geq 0$) のグラフを見ると, 0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある. つまり, 指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると, 値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある.



指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．xy 座標平面における関数 $y = x^n$ （$x \geq 0$）のグラフを見ると，0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．つまり，指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある．よって，指数が正の偶数 n であり定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は区間 $[0, \infty)$ である．



指数が正の偶数 n である冪関数 x^n を考える．逆関数を考えるために $x \geq 0$ とする．xy 座標平面における関数 $y = x^n$（$x \geq 0$）のグラフを見ると，0 以上の各実数 y に対して $y = x^n$ である実数 x が唯一つある．つまり，指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると，値域である区間 $[0, \infty)$ の各実数 y に対して $y = x^n$ である定義域の実数 x が唯一つある．よって，指数が正の偶数 n であり定義域が区間 $[0, \infty)$ である冪関数 x^n の逆関数があり，その定義域は区間 $[0, \infty)$ である．指数が正の偶数 n である冪関数 x^n の逆関数の 0 以上の実数 x における値を $\sqrt[n]{x}$ と書き表す．



[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

f の定義域の任意の要素 a について $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a$,

f の値域の任意の要素 a について $f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a$.

この定理を冪関数とその逆関数とに適用する.

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \text{ ，}$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \text{ ．}$$

定数 n は奇数とする． n を指数とする冪関数を f とおく： $f(x) = x^n$ ． f の定義域は実数全体とする． n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

定数 n は奇数とする．n を指数とする冪関数を f とおく：$f(x) = x^n$ ．f の定義域は実数全体とする．n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$ ，$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[n]{f(a)} = \sqrt[n]{a^n}$ なので

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ .$$

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big)=a \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big)=a \ .$$

定数 n は奇数とする. n を指数とする冪関数を f とおく: $f(x)=x^n$. f の定義域は実数全体とする. n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ である. 各実数 a について, 定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(a)\big)=a$, $f^{-1}\big(f(a)\big)=\sqrt[n]{f(a)}=\sqrt[n]{a^n}$ なので

$$\sqrt[n]{a^n}=a \ .$$

f の値域は実数全体である. 各実数 a について, 定理 **8.6.3** により $f\big(f^{-1}(a)\big)=a$, $f\big(f^{-1}(a)\big)=\{f^{-1}(a)\}^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ なので

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a \ .$$

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \text{ ，}$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \text{ ．}$$

定数 n は偶数とする．n を指数とする冪関数を f とおく：$f(x) = x^n$ ．f の定義域は 0 以上の実数の全体とする．n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

定数 n は偶数とする．n を指数とする冪関数を f とおく：$f(x) = x^n$ ．f の定義域は 0 以上の実数の全体とする．n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．0 以上の各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a$ ，$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \sqrt[n]{f(a)} = \sqrt[n]{a^n}$ なので

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ .$$

[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

定数 n は偶数とする．n を指数とする冪関数を f とおく：$f(x) = x^n$ ．f の定義域は 0 以上の実数の全体とする．n を指数とする冪関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ である．0 以上の各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$ ，$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[n]{f(a)} = \sqrt[n]{a^n}$ なので

$$\sqrt[n]{a^n} = a \ .$$

f の値域は 0 以上の実数の全体である．0 以上の各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f\big(f^{-1}(a)\big) = a$ ，$f\big(f^{-1}(a)\big) = \{f^{-1}(a)\}^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ なので

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \ .$$

[定理 9.5.1]　正の整数 n が奇数のとき，任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n} = a\ , \qquad \sqrt[n]{a}^{\,n} = a\ .$$

正の整数 n が偶数のとき， $a \geq 0$ である任意の実数 a について，

$$\sqrt[n]{a^n} = a\ , \qquad \sqrt[n]{a}^{\,n} = a\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ $-32 = (-2)^5$ なので

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \ .$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

例 $-32=(-2)^5$ なので

$$\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2 \ .$$

$$\sqrt[4]{5}^{\,8} = \sqrt[4]{5}^{\,4\cdot 2} = \left(\sqrt[4]{5}^{\,4}\right)^2 = 5^2 = 25 \ .$$

終

$$a^{mn} = (a^m)^n \qquad \sqrt[n]{a}^{\,n} = a$$

$\boxed{\text{問}9.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$ ，$\sqrt[5]{-2}^{\,15}$ ，$\sqrt[6]{64}$ ．

$\boxed{問9.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$ ，$\sqrt[5]{-2}^{15}$ ，$\sqrt[6]{64}$ ．

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$\boxed{問9.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$ ，$\sqrt[5]{-2}^{\,15}$ ，$\sqrt[6]{64}$ ．

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$$\sqrt[5]{-2}^{\,15} = \left(\sqrt[5]{-2}^{\,5}\right)^3 = (-2)^3 = -8 \ .$$

$\boxed{問9.5}$ 以下の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[4]{81}$ ，$\sqrt[5]{-2}^{\,15}$ ，$\sqrt[6]{64}$ ．

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \ .$$

$$\sqrt[5]{-2}^{\,15} = \left(\sqrt[5]{-2}^{\,5}\right)^3 = (-2)^3 = -8 \ .$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \ .$$

$\boxed{終}$

冪関数 x^1 の逆関数は $\sqrt[1]{x}$ なので，$\sqrt[1]{x^1} = x$; $x^1 = x$ なので，結局 $\sqrt[1]{x} = x$. つまり，$\sqrt[1]{\ }$ は実質的に意味がない.

冪関数 x^1 の逆関数は $\sqrt[1]{x}$ なので，$\sqrt[1]{x^1} = x$ ；$x^1 = x$ なので，結局 $\sqrt[1]{x} = x$ ．つまり，$\sqrt[1]{}$ は実質的に意味がない．

定義域が区間 $[0, \infty)$ である 2 次関数 x^2 の逆関数は $\sqrt{x}$ なので，$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ ．つまり，$\sqrt[2]{}$ は $\sqrt{}$ と同じことである．

正の整数 n に対して，記号 $\sqrt[n]{}$ を根号といい，実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがある．n が偶数であるときは，$\sqrt[n]{a}$ は $a \geq 0$ のときにのみ意味を持つ．

正の整数 n に対して，記号 $\sqrt[n]{}$ を根号といい，実数 a に対して $\sqrt[n]{a}$ を n 乗根 a ということがある．n が偶数であるときは，$\sqrt[n]{a}$ は $a \geq 0$ のときにのみ意味を持つ．

[定理 9.5.2]　任意の正の整数 n および任意の実数 a, b について，n が偶数であるとき $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば，

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\ .$$