9.3 立方の逆関数

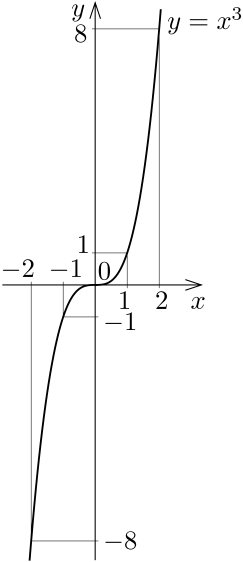
8.6 節で逆関数の定義を述べた.

8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

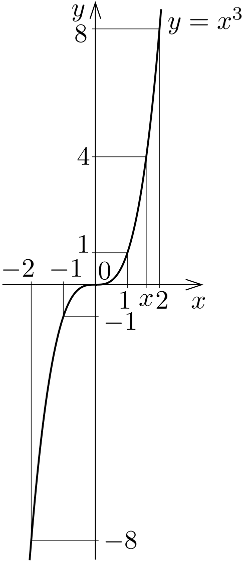
8.6 節で逆関数の定義を述べた．関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき，関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい，f^{-1} と書き表す．関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である．

実数 x の 3 乗 x^3 を x の立方ということがある．立方の逆関数を考える．

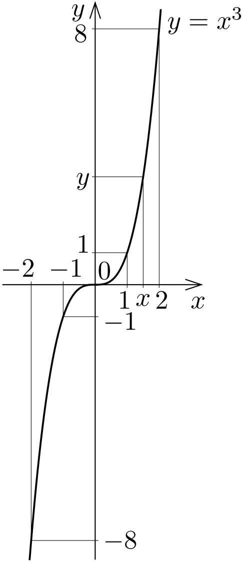
定義域が実数全体である関数 x^3 を考える.
その値域は実数全体である.



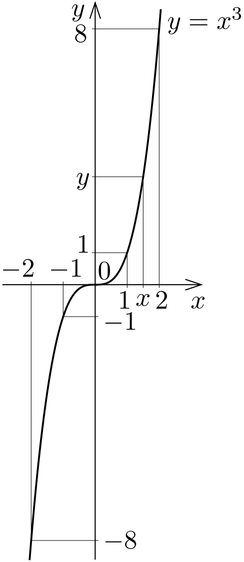
　定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．その値域は実数全体である．xy 座標平面における関数 $y=x^3$ のグラフを見ると，例えば 4 に対して $4=x^3$ である実数 x が唯一つある．



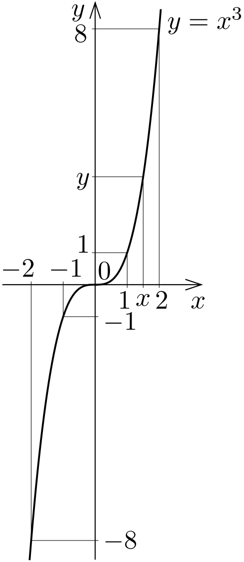
定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．その値域は実数全体である．xy 座標平面における関数 $y=x^3$ のグラフを見ると，例えば 4 に対して $4=x^3$ である実数 x が唯一つある．このように，各実数 y に対して $y=x^3$ である実数 x が唯一つある．



定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．その値域は実数全体である．xy 座標平面における関数 $y=x^3$ のグラフを見ると，例えば 4 に対して $4=x^3$ である実数 x が唯一つある．このように，各実数 y に対して $y=x^3$ である実数 x が唯一つある．よって，関数 x^3 の逆関数があり，その定義域は実数全体である．



　定義域が実数全体である関数 x^3 を考える．その値域は実数全体である．xy 座標平面における関数 $y=x^3$ のグラフを見ると，例えば 4 に対して $4=x^3$ である実数 x が唯一つある．このように，各実数 y に対して $y=x^3$ である実数 x が唯一つある．よって，関数 x^3 の逆関数があり，その定義域は実数全体である．関数 x^3 の逆関数の実数 x における値を $\sqrt[3]{x}$ と書き表す．



[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

この定理を立方とその逆関数とに適用する.

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき,

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$
$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

立方の関数を f とおく: $f(x) = x^3$. f の定義域は実数の全体とする. 立方の関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ である.

[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

立方の関数を f とおく：$f(x) = x^3$ ．f の定義域は実数の全体とする．立方の関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$ ，$f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[3]{f(a)} = \sqrt[3]{a^3}$ なので

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ .$$

[定理 **8.6.3**] 関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\big(f(a)\big) = a \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\big(f^{-1}(a)\big) = a \ .$$

立方の関数を f とおく： $f(x) = x^3$ ． f の定義域は実数の全体とする．立方の関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\big(f(a)\big) = a$ ， $f^{-1}\big(f(a)\big) = \sqrt[3]{f(a)} = \sqrt[3]{a^3}$ なので

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ .$$

f の値域は実数全体である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f\big(f^{-1}(a)\big) = a$ ， $f\big(f^{-1}(a)\big) = \{f^{-1}(a)\}^3 = \big(\sqrt[3]{a}\big)^3$ なので

$$\big(\sqrt[3]{a}\big)^3 = a \ .$$

[定理 **8.6.3**]　関数 f の逆関数 f^{-1} があるとき，

$$f \text{ の定義域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a \ ,$$

$$f \text{ の値域の任意の要素 } a \text{ について} \quad f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a \ .$$

　立方の関数を f とおく：$f(x) = x^3$ ．f の定義域は実数の全体とする．立方の関数 f の逆関数 f^{-1} は $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = a$ ，$f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) = \sqrt[3]{f(a)} = \sqrt[3]{a^3}$ なので

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ .$$

f の値域は実数全体である．各実数 a について，定理 **8.6.3** により $f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = a$ ，$f\bigl(f^{-1}(a)\bigr) = \{f^{-1}(a)\}^3 = \bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3$ なので

$$\bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3 = a \ .$$

[定理]　任意の実数 a について，

$$\sqrt[3]{a^3} = a \ , \qquad \bigl(\sqrt[3]{a}\bigr)^3 = a \ .$$

$\left(\sqrt[3]{A}\right)^3$ を $\sqrt[3]{A}^{\,3}$ のように略す.

$\boxed{\text{例}}$ $64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$\boxed{\text{例}}$ $64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 .$$

$-8 = (-2)^3$ なので

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 .$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

$\boxed{\text{例}}$ $64 = 4^3$ なので

$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4 \ .$$

$-8 = (-2)^3$ なので

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2 \ .$$

指数法則 $a^{mn} = (a^m)^n$ （ m, n は自然数） を用いる：

$$\sqrt[3]{5}^{\,6} = \sqrt[3]{5}^{\,3\cdot 2} = \left(\sqrt[3]{5}^{\,3}\right)^2 = 5^2 = 25 \ .$$ $\boxed{\text{終}}$

$$\sqrt[3]{a}^{\,3} = a$$

$\boxed{\text{問}9.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[3]{125}$，$\sqrt[3]{-27}$，$\sqrt[3]{-2}^{\,15}$．

$\boxed{問9.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[3]{125}$，$\sqrt[3]{-27}$，$\sqrt[3]{-2}^{\,15}$．

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$\boxed{問9.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[3]{-2}^{\,15}$.

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \ .$$

$\boxed{問 9.3}$ 次の式を計算して簡単にせよ：$\sqrt[3]{125}$，$\sqrt[3]{-27}$，$\sqrt[3]{-2}^{\,15}$．

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5 \ .$$

$$\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-3)^3} = -3 \ .$$

$$\sqrt[3]{-2}^{\,15} = \sqrt[3]{-2}^{\,3\cdot 5} = \left(\sqrt[3]{-2}^{\,3}\right)^5 = (-2)^5 = -32 \ .$$

平方根 $\sqrt{\quad}$ に関する定理と似た次の定理が成り立つ.

[定理] 任意の実数 a, b について,

$$\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}\ , \qquad b \neq 0 \text{ のとき } \quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\ .$$