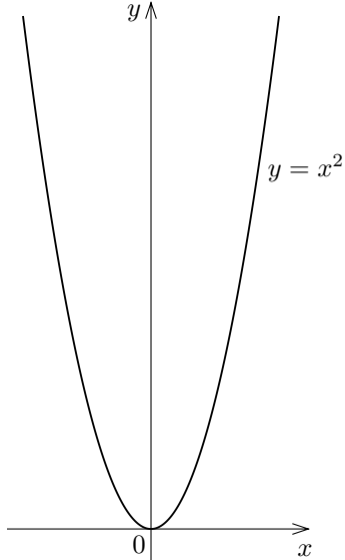


9.1 平方の逆関数

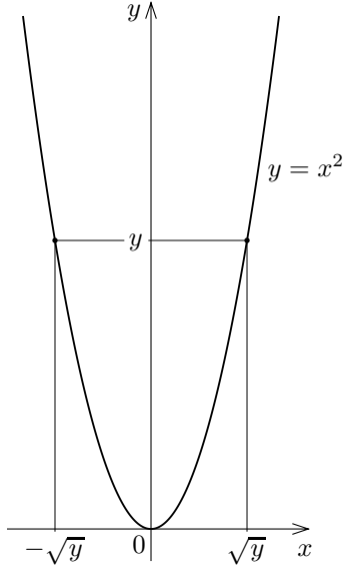
8.6 節で逆関数の定義を述べた.

8.6節で逆関数の定義を述べた. 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x が唯一つあるとき, 関数 f の値域の各要素 y に対して $y = f(x)$ となる f の定義域の要素 x を定める対応を f の逆関数といい, f^{-1} と書き表す. 関数 f の逆関数 f^{-1} の定義域は f の値域である.

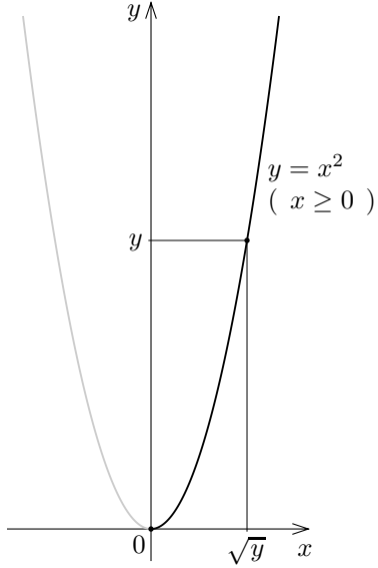
関数 x^2 の逆関数を考える. 実数 x, y について $y = x^2$ とする. $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$.



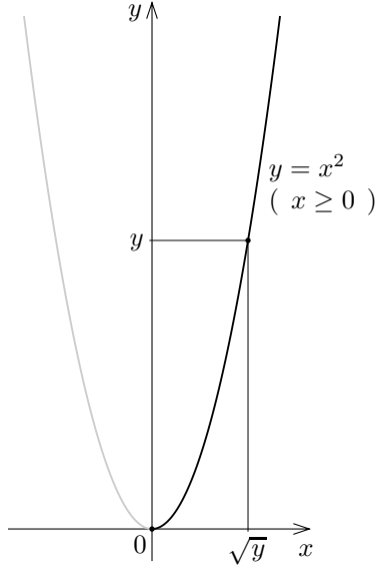
関数 x^2 の逆関数を考える. 実数 x, y について $y = x^2$ とする. $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$. $x = \pm\sqrt{y}$ なので, y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない. よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない.



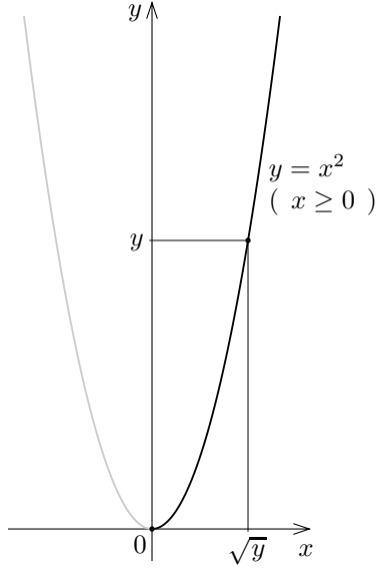
関数 x^2 の逆関数を考える. 実数 x, y について $y = x^2$ とする. $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$. $x = \pm\sqrt{y}$ なので, y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない. よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない. しかし, $x \geq 0$ とすると, $y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる.



関数 x^2 の逆関数を考える. 実数 x, y について $y = x^2$ とする. $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$. $x = \pm\sqrt{y}$ なので, y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない. よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない. しかし, $x \geq 0$ とすると, $y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる. 故に, 関数 x^2 の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると, 関数 \sqrt{y} というより関数 \sqrt{x} が逆関数になる.



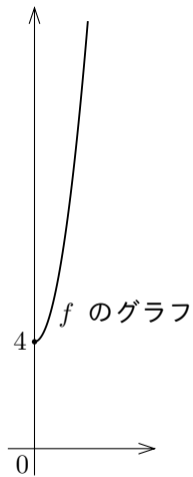
関数 x^2 の逆関数を考える. 実数 x, y について $y = x^2$ とする. $x^2 \geq 0$ なので $y \geq 0$. $x = \pm\sqrt{y}$ なので, y に対する x が必ずしも唯一つに定まらない. よって関数 x^2 の逆関数があるとは限らない. しかし, $x \geq 0$ とすると, $y \geq 0$ である各実数 y に対して $y = x^2$ である実数 x は $x = \sqrt{y}$ と唯一つに定まる. 故に, 関数 x^2 の定義域を区間 $[0, \infty)$ に制限すると, 関数 \sqrt{y} というより関数 \sqrt{x} が逆関数になる. つまり, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 x^2 の逆関数は, 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 \sqrt{x} である.



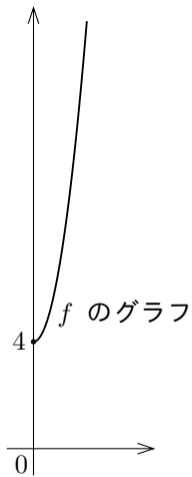
2 次関数の逆関数を調べる.

例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる.

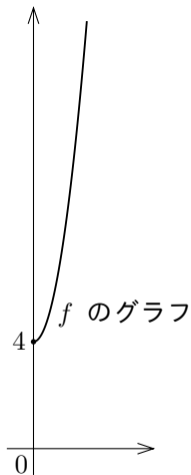
例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$.



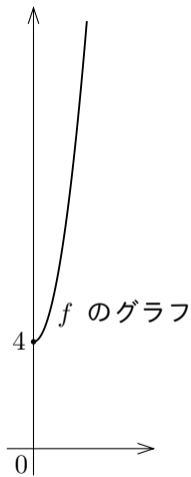
例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$. 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める.



例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$. 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり $3y^2 + 4 = x$ より, $3y^2 = x - 4$, $y^2 = \frac{x - 4}{3}$, $y = \pm \sqrt{\frac{x - 4}{3}}$;

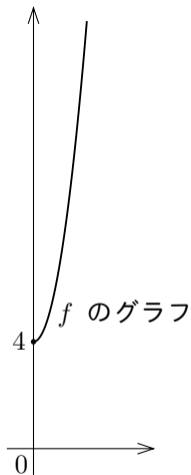


例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$. 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり $3y^2 + 4 = x$ より, $3y^2 = x - 4$, $y^2 = \frac{x - 4}{3}$, $y = \pm \sqrt{\frac{x - 4}{3}}$; y は区間 $[0, \infty)$ に属すので $y \geq 0$, よって $y = \sqrt{\frac{x - 4}{3}}$.

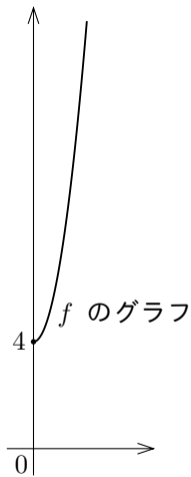


例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$. 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり $3y^2 + 4 = x$ より, $3y^2 = x - 4$, $y^2 = \frac{x-4}{3}$, $y = \pm\sqrt{\frac{x-4}{3}}$; y は区間 $[0, \infty)$ に属す

ので $y \geq 0$, よって $y = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$. このように, 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y が唯一つ定まり, $y = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$.



例 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 3x^2 + 4$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べる. 関数 f の値域は区間 $[4, \infty)$. 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり $3y^2 + 4 = x$ より, $3y^2 = x - 4$, $y^2 = \frac{x-4}{3}$, $y = \pm \sqrt{\frac{x-4}{3}}$; y は区間 $[0, \infty)$ に属すので $y \geq 0$, よって $y = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$. このように, 区間 $[4, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y が唯一つ定まり, $y = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$. 故に, 関数 f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域は区間 $[4, \infty)$ であり, $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-4}{3}}$.



問9.1.1 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 5x^2 - 7$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べよ.

関数 f の値域は区間 $[-7, \infty)$. 区間 $[-7, \infty)$ の各実数 x に対し
て $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり
 $5y^2 - 7 = x$ より, $5y^2 = x + 7$, $y^2 = \frac{x + 7}{5}$, y は区間 $[0, \infty)$ に属するので
 $y \geq 0$, よって $y = \sqrt{\frac{x + 7}{5}}$. 故に, 関数 f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定
義域は区間 $[-7, \infty)$ であり, $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x + 7}{5}}$.

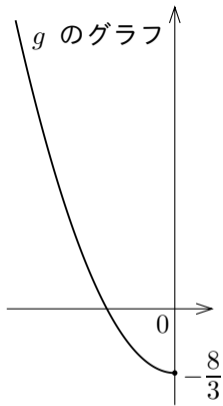
問9.1.1 定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f を $f(x) = 5x^2 - 7$ と定める. この関数 f の逆関数 f^{-1} を調べよ.

関数 f の値域は区間 $[-7, \infty)$. 区間 $[-7, \infty)$ の各実数 x に対して $f(y) = x$ となる区間 $[0, \infty)$ の実数 y を求める. $f(y) = x$ つまり $5y^2 - 7 = x$ より, $5y^2 = x + 7$, $y^2 = \frac{x+7}{5}$, y は区間 $[0, \infty)$ に属するので $y \geq 0$, よって $y = \sqrt{\frac{x+7}{5}}$. 故に, 関数 f の逆関数 f^{-1} があり, f^{-1} の定義域は区間 $[-7, \infty)$ であり, $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+7}{5}}$. **終**

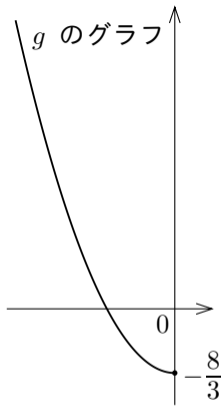
例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$

と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる.

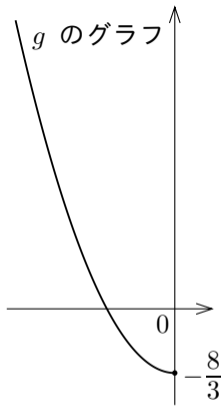
例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$.



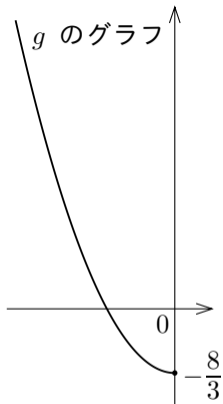
例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$. 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める.



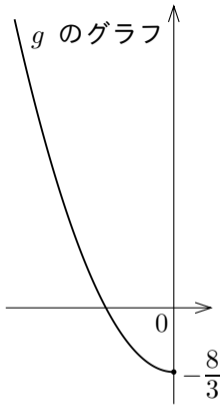
例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$. 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 - 8}{3} = x$ なので, $y^2 - 8 = 3x$, $y^2 = 3x + 8$, $y = \pm\sqrt{3x + 8}$;



例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$. 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 - 8}{3} = x$ なので, $y^2 - 8 = 3x$, $y^2 = 3x + 8$, $y = \pm\sqrt{3x + 8}$; y は区間 $(-\infty, 0]$ に属するので $y \leq 0$, よって $y = -\sqrt{3x + 8}$.

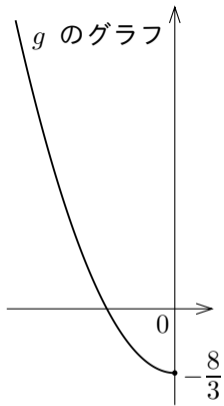


例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$. 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 - 8}{3} = x$ なので, $y^2 - 8 = 3x$, $y^2 = 3x + 8$, $y = \pm\sqrt{3x + 8}$; y は区間 $(-\infty, 0]$ に属するので $y \leq 0$, よって $y = -\sqrt{3x + 8}$. このように, 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y が唯一つ定まり, $y = -\sqrt{3x + 8}$.



例 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 - 8}{3}$

と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べる. 関数 g の値域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$. 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 - 8}{3} = x$ なので, $y^2 - 8 = 3x$, $y^2 = 3x + 8$, $y = \pm\sqrt{3x + 8}$; y は区間 $(-\infty, 0]$ に属するので $y \leq 0$, よって $y = -\sqrt{3x + 8}$. このように, 区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y が唯一つ定まり, $y = -\sqrt{3x + 8}$. 故に, 関数 g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域は区間 $[-\frac{8}{3}, \infty)$ であり, $g^{-1}(x) = -\sqrt{3x + 8}$.



問9.1.2 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 + 5}{2}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べよ.

関数 g の値域は区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$. この区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$ の各実数 x に対し $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 + 5}{2} = x$ より, $y^2 = 2x - 5$, $y = \pm\sqrt{2x - 5}$, x は区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$ に属するので $y \leq 0$, よって $y = -\sqrt{2x - 5}$. 故に, 関数 g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域は区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$ であり, $g^{-1}(x) = -\sqrt{2x - 5}$.

問9.1.2 定義域が区間 $(-\infty, 0]$ である関数 g を $g(x) = \frac{x^2 + 5}{2}$ と定める. この関数 g の逆関数 g^{-1} を調べよ.

関数 g の値域は区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$. この区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$ の各実数 x に対して $g(y) = x$ となる区間 $(-\infty, 0]$ の実数 y を求める. $g(y) = x$ つまり $\frac{y^2 + 5}{2} = x$ より, $y^2 + 5 = 2x$, $y^2 = 2x - 5$, x は区間 $(-\infty, 0]$ に属するので $y \leq 0$, よって $y = -\sqrt{2x - 5}$. 故に, 関数 g の逆関数 g^{-1} があり, g^{-1} の定義域は区間 $[\frac{5}{2}, \infty)$ であり, $g^{-1}(x) = -\sqrt{2x - 5}$. □