8. 拡充

関数の正体

関数とは唯一つのものを定める対応であると述べたが，それでは対応とは何か，疑問が残るかもしれない．対応とは何か，関数とは何か，数学的な定義を述べる．

1.8 節で述べたように，集合 A と B とに対して，A の要素 x と B の要素 y との順序対 (x,y) の全体を A と B との直積集合といい，$A \times B$ と書き表す：

$$A \times B = \{\ (x,y) \mid x \in A \quad \text{かつ} \quad y \in B\ \}\ .$$

A と B との直積集合 $A \times B$ の部分集合 C を考える；A の要素 x に B の要素 y とについて，$(x,y) \in C$ のときにだけ x に y が対応すると考える：

$$x \text{ に } y \text{ が対応する} \quad \Longleftrightarrow \quad (x,y) \in C \quad .$$

この集合 C が対応であると考える．つまり，対応とは，数学的には，直積集合の部分集合のことである．

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $A=\{1,2,3\}$ と集合 $B=\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ との直積集合 $A\times B$ は次のようになる：

$$A\times B=\{(1,\mathrm{a}),(1,\mathrm{b}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a}),(3,\mathrm{b})\}\ .$$

例えばこの直積集合 $A\times B$ の部分集合

$$\{(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{b})\}$$

が対応である；この対応では，1 に a が対応し，2 に a と b とが対応し，3 に b が対応する. $\boxed{\text{終}}$

集合 S を定義域とする対応とは，S とある集合 T の直積集合

$$S \times T = \{\,(x,y) \mid x \in S \quad \text{かつ} \quad y \in T\,\}$$

の部分集合のことである．そして，集合 S を定義域とする対応 C が関数であるとは，S の各要素 x に対して $(x,y) \in C$ となる y が唯一つに定まることである．

$\boxed{\text{例}}$ 集合 $S = \{1,2,3\}$ を定義域とする対応を考える．a と b とは異なる対象とする．S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{b})\,\}$ は関数ではない；何故なら，2 に a と b と異なる 2 個の対象が対応する．S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(3,\mathrm{b})\,\}$ は関数ではない；何故なら，2 に対応するものが無い．S を定義域とする対応 $\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a})\,\}$ は関数である：1 に a だけが対応し，2 に b だけが対応し，3 に a だけが対応します． $\boxed{\text{終}}$

集合 S を定義域とする関数 f について，S の各要素 x に対して $(x,y)\in f$ となる y が唯一つに定まる；この y を x における f の値といい，$f(x)$ と書き表す．つまり次のようになる：

$$y=f(x) \iff (x,y)\in f\ .$$

例 集合 $S=\{1,2,3\}$ を定義域とする対応を考える．a と b とは異なる対象とする．S を定義域とする対応 $f=\{\,(1,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(3,\mathrm{a})\,\}$ は関数である．この関数 f について次のようになる：$(1,\mathrm{a})\in f$ なので $f(1)=\mathrm{a}$ ，$(2,\mathrm{b})\in f$ なので $f(2)=\mathrm{b}$ ，$(3,\mathrm{a})\in f$ なので $f(3)=\mathrm{a}$ ． 終

例 実数全体を定義域とする 1 次関数 f を $f(x)=2x+3$ と定めるということは，$f=\{\,(x,2x+3)\mid x$ は実数$\,\}$ と定めることである．区間 $[0,7]$ を定義域とする 2 次関数 g を $g(x)=x^2$（$0\le x\le 7$）と定めることは，$g=\{\,(x,x^2)\mid x$ は実数で $0\le x\le 7\,\}$ と定めることである． 終

関数 f について，

$$\text{各実数 } x, y \text{ について} \quad y = f(x) \iff (x,y) \in f$$

なので，f は，$y = f(x)$ となる実数 x と y との順序対 (x,y) の全体，つまり f のグラフである．このように，関数 f のグラフが f の正体である．