8.9 関数の平均変化率

例 地上で物体の自由落下をハイスピード撮影して計測すると次のことが分かる：0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\mathrm{m}$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体の自由落下をハイスピード撮影して計測すると次のことが分かる：0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\mathrm{m}$ である．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおくと，$\varphi(t) = 4.9t^2$ である．

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体の自由落下をハイスピード撮影して計測すると次のことが分かる：0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\mathrm{m}$ である．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおくと， $\varphi(t) = 4.9t^2$ である．

物体が落下している間の時間（単位は秒）に対する落下の平均の速さ（単位は $\mathrm{m/s}$ ）を考える．落下している間のある時刻からある時刻までの落下の平均の速さは次のようになる：

$$\text{落下の平均の速さ} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}}\ .$$

例 地上で物体の自由落下をハイスピード撮影して計測すると次のことが分かる：0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\mathrm{m}$ である．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m ）を $\varphi(t)$ とおくと， $\varphi(t) = 4.9t^2$ である．

物体が落下している間の時間（単位は秒）に対する落下の平均の速さ（単位は $\mathrm{m/s}$ ）を考える．落下している間のある時刻からある時刻までの落下の平均の速さは次のようになる：

$$\text{落下の平均の速さ} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}}\ .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2$ に変化する；

$\boxed{\text{例}}$ 地上で物体の自由落下をハイスピード撮影して計測すると次のことが分かる：0 以上の実数 t に対して，落下し始めてから t 秒後の落下距離は約 $4.9t^2\mathrm{m}$ である．つまり，t 秒後の落下距離（単位は m）を $\varphi(t)$ とおくと，$\varphi(t) = 4.9t^2$ である．

物体が落下している間の時間（単位は秒）に対する落下の平均の速さ（単位は m/s）を考える．落下している間のある時刻からある時刻までの落下の平均の速さは次のようになる：

$$\text{落下の平均の速さ} = \frac{\text{落下距離}}{\text{落下時間}} .$$

例えば，落下開始 3 秒後から 5 秒後までの 2 秒間に，落下距離は $\varphi(3) = 4.9 \times 3^2$ から $\varphi(5) = 4.9 \times 5^2$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(5) - \varphi(3) = 4.9 \times 5^2 - 4.9 \times 3^2$ なので，この間の落下の平均の速さは

$$\frac{\varphi(5) - \varphi(3)}{5 - 3} = \frac{4.9 \times 5^2 - 4.9 \times 3^2}{2} = \frac{122.5 - 44.1}{2} = 39.2 .$$

0 以上の実数 a, b（但し $a \neq b$ ）とに対して，落下開始 a 秒後から b 秒後まで $(b-a)$ 秒間に，落下距離は $\varphi(a) = 4.9a^2$ から $\varphi(b) = 4.9b^2$ に変化する；

　0 以上の実数 a, b（但し $a \neq b$ ）とに対して，落下開始 a 秒後から b 秒後まで $(b-a)$ 秒間に，落下距離は $\varphi(a) = 4.9a^2$ から $\varphi(b) = 4.9b^2$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(b) - \varphi(a) = 4.9b^2 - 4.9a^2$ なので，

0 以上の実数 a, b（但し $a \neq b$ ）とに対して，落下開始 a 秒後から b 秒後まで $(b-a)$ 秒間に，落下距離は $\varphi(a)=4.9a^2$ から $\varphi(b)=4.9b^2$ に変化する；この間の落下距離は $\varphi(b)-\varphi(a)=4.9b^2-4.9a^2$ なので，この間の落下の平均の速さは

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} &= \frac{4.9b^2-4.9a^2}{b-a} = \frac{4.9(b^2-a^2)}{b-a} = \frac{4.9(b+a)(b-a)}{b-a} \\ &= 4.9(a+b)\ .\end{aligned}$$

終

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考える.

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考える．

[定義] 関数 f の定義域に属す実数 a,b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率とは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の値である．

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考える．

[定義] 関数 f の定義域に属す実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率とは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の値である．

関数 f の平均変化率は，f の値が変化する平均の速さである．

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考える．

[定義] 関数 f の定義域に属す実数 a,b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率とは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の値である．

関数 f の平均変化率は，f の値が変化する平均の速さである．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である 1 次関数 f を $f(x)=3x-2$ と定める．実数 a,b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

この例の落下の平均の速さ $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$ を一般化して，関数の平均変化率というものを考える．

[定義] 関数 f の定義域に属す実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率とは，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ の値である．

関数 f の平均変化率は，f の値が変化する平均の速さである．

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である 1 次関数 f を $f(x)=3x-2$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$f(a)=3a-2$ ，$f(b)=3b-2$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{3b-2-(3a-2)}{b-a}=\frac{3b-3a}{b-a}=\frac{3(b-a)}{b-a}=3 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.9.1}$ 定義域が実数全体である 1 次関数 f を $f(x) = -4x + 7$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求めよ．

$\boxed{問 8.9.1}$ 定義域が実数全体である 1 次関数 f を $f(x) = -4x + 7$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求めよ．

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-4b + 7 - (-4a + 7)}{b - a} = \frac{-4(b - a)}{b - a} = -4 \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 f を $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

例　定義域が実数全体である2次関数 f を $f(x)=3x^2-5x+4$ と定める．実数 a,b（但し $a\neq b$）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$f(a)=3a^2-5a+4$，$f(b)=3b^2-5b+4$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}&=\frac{3b^2-5b+4-(3a^2-5a+4)}{b-a}=\frac{3b^2-3a^2-5b+5a}{b-a}\\&=\frac{3(b^2-a^2)-5(b-a)}{b-a}=\frac{3(b-a)(b+a)-5(b-a)}{b-a}=3(b+a)-5\\&=3(a+b)-5\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 8.9.2}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 f を $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$ と定めます. 実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して, a から b までの f の平均変化率を求めよ.

$\boxed{問 8.9.2}$ 定義域が実数全体である 2 次関数 f を $f(x)=-3x^2+4x+5$ と定めます. 実数 a,b（但し $a\neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{-3b^2+4b+5-(-3a^2+4a+5)}{b-a} = \frac{-3(b^2-a^2)+4(b-a)}{b-a} \\ &= \frac{-3(b+a)(b-a)+4(b-a)}{b-a} \\ &= -3(a+b)+4 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定義域が実数全体である 3 次関数 f を $f(x)=2x^3$ と定める．実数 a,b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$\boxed{例}$ 定義域が実数全体である3次関数 f を $f(x)=2x^3$ と定める．実数 a,b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率を求める．

$f(a)=2a^3$ ， $f(b)=2b^3$ なので，f の a から b までの平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{2b^3-2a^3}{b-a} = \frac{2(b^3-a^3)}{b-a} \\ &= \frac{2(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a} = 2(b^2+ab+a^2) \\ &= 2(a^2+ab+b^2)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}8.9.3}$ 定義域が実数全体である 3 次関数 f を $f(x) = 4x^3$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの関数 f の平均変化率を求めよ．

$\boxed{問8.9.3}$ 定義域が実数全体である 3 次関数 f を $f(x) = 4x^3$ と定める．実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの関数 f の平均変化率を求めよ．

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{4b^3 - 4a^3}{b - a} = \frac{4(b^3 - a^3)}{b - a} \\ &= \frac{4(b - a)(b^2 + ba + a^2)}{b - a} = 4(b^2 + ba + a^2) \\ &= 4(a^2 + ab + b^2)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

関数 f の定義域に属す実数 a, b（但し $a \neq b$ ）に対して，a から b までの f の平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は，座標平面における f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ と $\big(b, f(b)\big)$ とを結ぶ線分の傾きである．